MARCUS DU SAUTOY

2 3 5 7 11

13 19

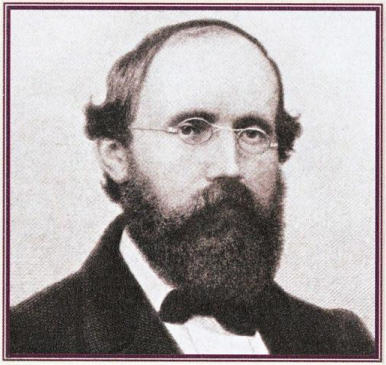
17 29

23 37

31 43

41 53

47 59



L'ENIGMA DEI NUMERI PRIMI

L'ipotesi di Riemann, il più grande mistero della matematica

Rizzoli

VISIT…

Nel 1866, mentre l'esercito prussiano entrava a Gottinga, il sommo matematico tedesco Bernhard Riemann lasciava in fretta e furia la città per rifugiarsi nell'amata Italia, abbandonando pagine e pagine di appunti che una governante troppo solerte si affrettò a bruciare. Fra quelle carte perdute si nascondeva forse la soluzione di un enigma millenario: il mistero dei numeri primi. Nell'universo razionale della matematica, i numeri primi, cioè divisibili soltanto per se stessi e per 1, si susseguono con un ritmo inafferrabile, apparentemente illogico: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31... Sembra quasi che la natura li abbia scelti a caso. Ma non sono numeri qualsiasi, sono gli "atomi dell'aritmetica", gli elementi di base con cui si costruiscono tutti gli altri numeri naturali. Cogliere un ordine nella loro sequenza, trovare una regola che permetta di stabilire quale sia, ad esempio, il miliardesimo numero primo, avrebbe implicazioni fondamentali, e non solo per la matematica. Per questo l'ipotesi che Riemann aveva formulato sette anni prima di fuggire da Gottinga è ancora tanto importante: se fosse vera, significherebbe che sotto quell'oscura cadenza di numeri si cela una delicata armonia densa di conseguenze. Ma dopo un secolo e mezzo nessuno è stato ancora capace di dimostrarla. Chi ci riuscisse oggi si assicurerebbe, oltre a una fama imperitura, il premio da un milione di dollari che di recente un imprenditore americano innamorato della matematica ha messo in palio. Proprio a partire dall'ipotesi di Riemann, in questo libro Marcus Du Sautoy presenta con chiarezza esemplare i principali enigmi risolti e irrisolti del mondo dei numeri primi, spiegando quale sia la loro importanza attuale in campi come la fisica quantistica e la sicurezza informatica. Per farlo racconta la storia e le mirabolanti avventure (non solo intellettuali) dei grandi matematici che in ogni epoca si sono spinti in quel territorio misterioso. Da Euclide, che nel quarto secolo avanti Cristo dimostrò l'esistenza di infiniti numeri primi, fino agli odierni continuatori dell'opera di Riemann, come il matematico pavese Enrico Bombieri, questa è la storia di uomini e donne eccentrici e geniali, accomunati dalla stessa ossessione e da un'inestinguibile sete di conoscenza.

Marcus du Sautoy insegna matematica all'Università di Oxford ed è uno dei maggiori specialisti mondiali di teoria analitica dei numeri. Collabora con il "Times" e la BBC. *L'enigma dei numeri primi*, il suo primo libro, ha già ottenuto recensioni entusiastiche e un grande successo di pubblico nei paesi di lingua inglese.

In copertina:
ritratto di Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866),
© Bettmann/Corbis/Contrasto.
Progetto grafico di Matteo Bologna per Mucca Design

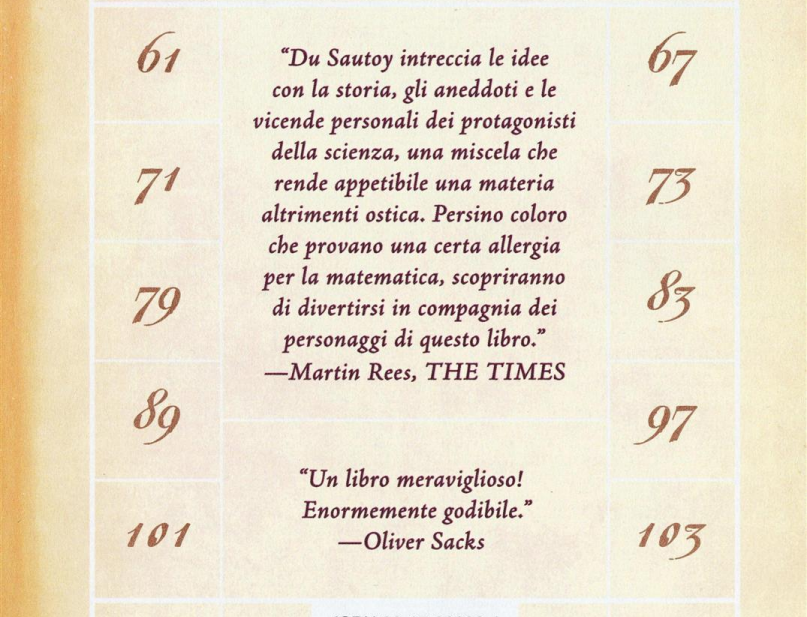
www.rizzoli.rcslibri.it
infopoint@rcs.it

JohnnyX © 2007 Graphics

€ 20,00

ISBN 88-17-00098-1

ALLA SCOPERTA DI UN ENIGMA ANCORA PIÙ PROFONDO (E DALLE CONSEGUENZE PIÙ DECISIVE) DI QUELLO DELL'ULTIMO TEOREMA DI FERMAT.



"Du Sautoy intreccia le idee con la storia, gli aneddoti e le vicende personali dei protagonisti della scienza, una miscela che rende appetibile una materia altrimenti ostica. Persino coloro che provano una certa allergia per la matematica, scopriranno di divertirsi in compagnia dei personaggi di questo libro."
—Martin Rees, THE TIMES

"Un libro meraviglioso! Enormemente godibile."
—Oliver Sacks

ISBN 88-17-00098-1
9 788817 000987

L'enigma dei numeri primi

In memoria di
Yonathan du Sautoy
21 Ottobre 2000

I

Chi vuol essere milionario?

«Sappiamo di che sequenza di numeri si tratta? D'accordo, vediamo, possiamo arrivarci con la nostra testa... cinquantanove, sessantuno, sessantasette... settantuno... Non sono tutti numeri primi?» Un brusio di eccitazione si diffuse per la sala di controllo. Il volto di Ellie rivelò per un istante il fremito di un'emozione intensa, che fu però rapidamente sostituito da un'espressione sobria, da un timore di lasciarsi sopraffare, da un'inquietudine di apparire sciocca, non scientifica.

Carl Sagan, *Contact*

Una mattina calda e umida dell'agosto 1900, David Hilbert dell'università di Gottinga prese la parola al Congresso internazionale dei matematici in una gremita sala per le conferenze della Sorbona, a Parigi. Hilbert, che già allora era riconosciuto come uno dei più grandi matematici dell'epoca, aveva preparato un discorso ardito. Si proponeva di parlare non di ciò che era già stato dimostrato ma di ciò che era an-

cora ignoto. Questo andava contro tutte le regole, e quando Hilbert cominciò a esporre la propria visione del futuro della matematica il pubblico percepì il nervosismo nella sua voce. «Chi di noi non sarebbe felice di sollevare il velo dietro al quale si cela il futuro; di gettare uno sguardo ai progressi venturi della nostra scienza e ai segreti del suo sviluppo nel corso dei prossimi secoli?» Per annunciare il nuovo secolo, Hilbert proponeva come sfida ai suoi ascoltatori un elenco di ventitré problemi che secondo lui avrebbero dovuto tracciare la rotta per gli esploratori matematici del XX secolo.

I decenni che seguirono videro le risposte a molti di quei problemi, e coloro che ne scoprirono le soluzioni formano un illustre gruppo di matematici noto con il nome di «The Honours Class». Il gruppo comprende personaggi del calibro di Kurt Gödel e di Henri Poincaré, insieme a molti altri pionieri le cui idee hanno mutato radicalmente il paesaggio della matematica. Ma c'era un problema, l'ottavo nell'elenco di Hilbert, che sembrava destinato a sopravvivere al secolo senza che si trovasse un campione in grado di sconfiggerlo: l'ipotesi di Riemann.

Di tutte le sfide che Hilbert aveva approntato, l'ottava occupava un posto speciale nel suo cuore. Esiste un mito germanico su Federico Barbarossa, un imperatore molto amato dai tedeschi. Dopo la sua morte, avvenuta durante la Terza Crociata, si diffuse la leggenda che in realtà Federico fosse ancora vivo, e che giacesse addormentato in una caverna nel monte Kyffhäuser. Si sarebbe risvegliato solo quando la Germania avesse avuto bisogno di lui. Si dice che qualcuno chie-

se a Hilbert: «Se lei, come il Barbarossa, dovesse rinascere fra cinquecento anni, quale sarebbe la prima cosa che farebbe?». «Domanderei se qualcuno ha dimostrato l'ipotesi di Riemann» fu la sua risposta.

Mentre il XX secolo stava per chiudersi, la maggior parte dei matematici si era rassegnata al fatto che fra tutti i problemi proposti da Hilbert quella gemma preziosa non solo aveva grandi probabilità di sopravvivere al secolo, ma forse non sarebbe stata ancora risolta quando Hilbert si fosse risvegliato dal suo sonno di cinquecento anni. Con quel suo rivoluzionario discorso carico di un senso di mistero, egli aveva provocato sconcerto al primo Congresso internazionale del XX secolo. Tuttavia, per quei matematici che avevano in programma di partecipare all'ultimo Congresso del secolo c'era in serbo una sorpresa.

Il 7 aprile 1997 una notizia eccezionale balenò sugli schermi dei computer dell'intera comunità matematica mondiale. Sul sito web del Congresso internazionale che si sarebbe tenuto l'anno seguente a Berlino comparve l'annuncio che la conquista del Santo Graal della matematica era stata finalmente rivendicata. Qualcuno aveva dimostrato l'ipotesi di Riemann. Quella notizia era destinata ad avere effetti profondi. L'ipotesi di Riemann è un problema centrale per l'intera matematica. Mentre leggevano la loro posta elettronica, i matematici fremevano d'eccitazione alla prospettiva di comprendere uno dei più grandi misteri della matematica.

L'annuncio giungeva in una lettera del professor Enrico Bombieri. Non si sarebbe potuta chiedere una fonte migliore,

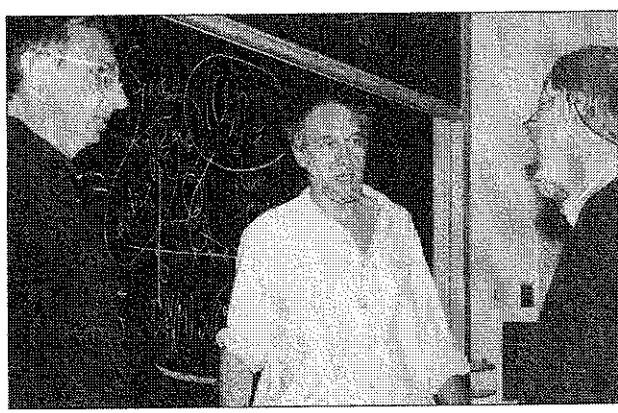
più stimata. Bombieri è uno dei custodi dell'ipotesi di Riemann e risiede al prestigioso Institute for Advanced Study di Princeton, che già ospitò Einstein e Gödel. Parla in modo molto pacato, ma i matematici ascoltano con attenzione tutto quello che ha da dire.

Bombieri è cresciuto in Italia, dove i vigneti della sua ricca famiglia gli hanno fatto acquisire un gusto per le cose belle della vita. I colleghi lo chiamano con affetto «l'aristocratico della matematica». Da giovane la sua eleganza raffinata attraeva sempre l'attenzione ai convegni europei, dove spesso arrivava alla guida di costose automobili sportive. Lui, d'altra parte, era ben felice di alimentare le voci secondo cui una volta si era classificato sesto a una ventiquattrore automobilistica in Italia. Col tempo i suoi successi nel circuito matematico furono più tangibili e negli anni Settanta gli valsero un invito a recarsi a Princeton, dove è rimasto. Ha sostituito l'entusiasmo per le corse con una passione per la pittura, soprattutto per i ritratti.

Ma è l'arte creativa della matematica, e in particolare la sfida posta dall'ipotesi di Riemann, a procurare a Bombieri l'eccitazione più grande. L'ipotesi di Riemann lo aveva ossessionato fin dalla precoce età di quindici anni, quando ne aveva letto per la prima volta. Le proprietà dei numeri non smettevano di affascinarlo mentre sfogliava i libri di matematica che suo padre, un economista, aveva raccolto nella sua vasta biblioteca. Scoprì che l'ipotesi di Riemann era considerata il problema più profondo e fondamentale della teoria dei numeri. E la sua passione per quel problema crebbe ancor di più quando suo padre si offrì di compragli una

Ferrari se l'avesse risolto, un tentativo disperato di fargli smettere di guidare la *sua* Ferrari.

Stando all'e-mail di Bombieri, qualcuno l'aveva battuto sul tempo, facendogli perdere il premio. «Ci sono sviluppi fantastici alla conferenza che Alain Connes ha tenuto all'Institute for Advanced Study mercoledì scorso» esordiva Bombieri. Molti anni prima, la notizia che Connes aveva rivolto la propria attenzione all'ipotesi di Riemann, con l'intento di provare a sbrogliarla, aveva infiammato il mondo matematico. Connes è uno dei rivoluzionari della disciplina, un mite Robespierre della matematica rispetto al Luigi XVI incarnato da Bombieri. È un personaggio dotato di un carisma straordinario, il cui stile focoso lo pone ben lontano dall'immagine tradizionale del matematico serioso e impacciato.



Alain Connes, professore dell'Institut des Hautes Études Scientifiques e del Collège de France.

Ha la passione di un fanatico profondamente convinto della propria visione del mondo, e chi assiste alle sue lezioni ne rimane ipnotizzato. Per i suoi seguaci è quasi una figura di culto. Sarebbero felici di unirsi a lui sulle barricate della matematica per difendere il loro eroe da ogni controffensiva lanciata dalle posizioni di trinceramento dell'*ancien régime*.

La sede di lavoro di Connes è la risposta francese all'Institute di Princeton: l'Institut des Hautes Études Scientifiques di Parigi. Da quando vi arrivò, nel 1979, Connes ha creato un linguaggio completamente nuovo per la comprensione della geometria. L'idea di portare questa disciplina agli estremi dell'astrazione non lo spaventa. Persino fra le file dei matematici, che in genere hanno familiarità con l'approccio fortemente concettuale della loro disciplina nei confronti della realtà, la maggioranza ha esitato di fronte alla rivoluzione astratta proposta da Connes. Eppure, come egli ha dimostrato a coloro che dubitano della necessità di una teoria tanto asciutta, il suo nuovo linguaggio geometrico custodisce molti indizi utili a comprendere il mondo reale della fisica quantistica. Se poi questo instilla il terrore nel cuore delle masse matematiche, pazienza.

L'audace convinzione di Connes secondo cui la sua nuova geometria non solo avrebbe potuto togliere il velo al mondo della fisica quantistica ma anche spiegare l'ipotesi di Riemann – il più grande mistero relativo ai numeri – fu accolta con sorpresa e persino con turbamento. Il fatto che egli osasse avventurarsi nel cuore della teoria dei numeri e confrontarsi direttamente con il più difficile problema irrisolto della

matematica rispecchiava il suo disprezzo per i confini convenzionali. Fin dal suo arrivo sulla scena a metà degli anni Novanta, c'era nell'aria la sensazione che se mai esistesse qualcuno dotato delle risorse necessarie per sconfiggere quel problema di famigerata difficoltà, costui era Alain Connes.

Ma a quanto pareva non era stato Connes ad aver trovato l'ultima tessera di quel complicato puzzle. Nella sua e-mail Bombieri proseguiva spiegando come un giovane fisico che assisteva alla conferenza avesse visto «in un lampo» un modo di utilizzare il suo bizzarro mondo di «sistemi supersimmetrici fermionico-bosonici» per attaccare l'ipotesi di Riemann. Non erano molti i matematici a conoscere il significato di quel cocktail di termini tecnici da poco in voga fra i fisici delle particelle, ma Bombieri spiegava che esso descriveva «la fisica corrispondente a un insieme statistico molto vicino allo zero assoluto di una miscela di anioni e moroni con spin opposti». La faccenda suonava ancora alquanto oscura, ma in fondo si trattava della soluzione al problema più difficile della storia della matematica, per cui nessuno si aspettava che fosse una cosa semplice. Stando a Bombieri, dopo sei giorni di lavoro ininterrotto e grazie all'aiuto di un nuovo linguaggio di programmazione chiamato MISPAR, il giovane fisico aveva finalmente scardinato il problema più arduo della matematica.

Bombieri concludeva la sua e-mail con le parole: «Wow! Per favore date la massima diffusione a questa notizia». Per quanto straordinario fosse il fatto che un giovane fisico avesse finito per dimostrare l'ipotesi di Riemann, la notizia non

era poi così sorprendente. Nel corso degli ultimi decenni era capitato molto spesso che matematica e fisica si trovassero avviluppate insieme. Pur essendo un problema al cui cuore stava la teoria dei numeri, da qualche anno l'ipotesi di Riemann mostrava delle risonanze inaspettate con alcuni problemi della fisica delle particelle.

I matematici si preparavano a cambiare i loro programmi di viaggio per volare a Princeton e condividere quel momento. Era ancora fresco il ricordo dell'eccitazione di pochi anni prima, quando Andrew Wiles, un matematico inglese, aveva annunciato la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat nel corso di una conferenza tenuta a Cambridge nel giugno del 1993. Wiles aveva dimostrato che l'affermazione di Fermat secondo cui l'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ha soluzioni per n maggiore di 2 era corretta. Non appena Wiles aveva posato il gessetto al termine della conferenza, i tappi delle bottiglie di champagne avevano cominciato a saltare e i flash delle macchine fotografiche a lampeggiare.

I matematici sapevano tuttavia che dimostrare l'ipotesi di Riemann avrebbe avuto un'importanza di gran lunga maggiore per il futuro della matematica di quanto non l'avesse sapere che l'equazione di Fermat non ammette soluzioni. Come Bombieri aveva scoperto alla tenera età di quindici anni, con l'ipotesi di Riemann si tentano di comprendere gli oggetti più fondamentali della matematica: i numeri primi.

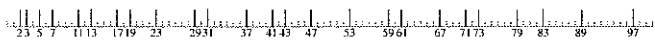
I numeri primi sono i veri e propri atomi dell'aritmetica. Si definiscono primi i numeri interi indivisibili, cioè quelli che non possono essere scritti come prodotto di due numeri

interi più piccoli. I numeri 13 e 17 sono primi, mentre il numero 15 non lo è, dato che può essere scritto come il prodotto di 3 e 5. I numeri primi sono gioielli incastonati nell'immensa distesa dei numeri, l'universo infinito che i matematici esplorano da secoli. Ai matematici i numeri primi infondono un senso di meraviglia: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23..., numeri senza tempo che esistono in un mondo indipendente dalla nostra realtà fisica. Sono un dono che la Natura ha fatto al matematico.

La loro importanza per la matematica deriva dal fatto che hanno il potere di costruire tutti gli altri numeri. Ogni numero intero che non sia primo può essere costruito moltiplicando questi elementi di base primari. Ogni molecola esistente nel mondo fisico può essere costruita utilizzando gli atomi della tavola periodica degli elementi chimici. Un elenco dei numeri primi è la tavola periodica del matematico. I numeri primi 2, 3 e 5 sono l'idrogeno, l'elio e il litio del suo laboratorio. Padroneggiare questi elementi di base offre al matematico la speranza di poter scoprire nuovi metodi per costruire la mappa di un percorso che attraversi le smisurate complessità del mondo matematico.

Eppure, a dispetto della loro apparente semplicità e della loro natura fondamentale, i numeri primi restano gli oggetti più misteriosi studiati dai matematici. In una disciplina che si dedica a trovare andamenti regolari e ordine, i numeri primi presentano la sfida estrema. Provate a esaminare un elenco di numeri primi. Scoprirete che è impossibile prevedere quando apparirà il successivo. L'elenco sembra caotico, ca-

suale, e non fornisce alcun indizio riguardo al modo di determinare il suo prossimo elemento. L'elenco dei numeri primi è il ritmo cardiaco della matematica, ma è una pulsazione stimolata da un potente cocktail a base di caffeina:



I numeri primi compresi fra 1 e 100: il battito cardiaco irregolare della matematica.

Riuscite a trovare una formula che generi i numeri di questo elenco, una regola magica che vi dica qual è il centesimo numero primo? Questo problema affligge la mente dei matematici da molti secoli. Nonostante più di duemila anni di sforzi, i numeri primi sembrano vanificare ogni tentativo di inserirli in un semplice schema regolare. Generazioni sono rimaste sedute ad ascoltare il ritmo del tamburo dei primi che emette la sua sequenza di numeri: due colpi, seguiti da tre colpi, poi da cinque, sette, undici. Man mano che la sequenza continua, è facile essere indotti a pensare che il tamburo dei numeri primi emetta un rumore bianco casuale, privo di una logica interna. Al centro della matematica, della ricerca dell'ordine, i matematici riescono a sentire soltanto il suono del caos.

I matematici non sopportano di dover ammettere che non esista una spiegazione del modo in cui la Natura ha scelto i numeri primi. Se la matematica non avesse una struttura, se non possedesse una sua meravigliosa semplicità, non

varrebbe la pena di studiarla. L'ascolto di un rumore bianco non è mai stato considerato un passatempo piacevole. Come scrisse il matematico francese Henri Poincaré, «lo scienziato non studia la Natura perché è utile farlo; la studia perché ne trae diletto, e ne trae diletto perché la Natura è bella. Se non fosse bella, non varrebbe la pena di conoscerla, e se non valesse la pena di conoscere la Natura, la vita non sarebbe degna di essere vissuta».

Si può sempre sperare che, dopo un inizio nervoso, il battito dei numeri primi si regolarizzi. Non è così: più si prosegue a contare, più le cose peggiorano. Consideriamo, per esempio, i numeri primi compresi nell'intervallo dei cento numeri che precedono 10.000.000 e nell'intervallo dei cento numeri che seguono 10.000.000. Cominciamo dai numeri primi inferiori a 10.000.000:

9.999.901, 9.999.907, 9.999.929, 9.999.931, 9.999.937, 9.999.943, 9.999.971, 9.999.973, 9.999.991

Ma osservate adesso quanto pochi siano i numeri primi compresi fra 10.000.000 e 10.000.100:

10.000.019, 10.000.079

È difficile pensare a una formula in grado di generare una sequenza di questo tipo. In effetti, questa serie di numeri primi ricorda molto più una successione casuale di numeri che non una struttura ben ordinata. Proprio come novanta-

nove lanci di una moneta sono di ben poca utilità per stabilire l'esito del centesimo lancio, così i numeri primi sembrano vanificare ogni tentativo di previsione.

I numeri primi presentano ai matematici una delle contrapposizioni più strane che esistono nella loro disciplina. Da un lato un numero o è primo oppure non lo è. Non è il lancio di una moneta che può rendere all'improvviso un numero divisibile per un altro più piccolo. D'altra parte è impossibile negare che la successione dei primi appaia proprio come una sequenza di numeri scelti a caso. È vero che i fisici si stanno sempre più abituando all'idea che un dado quantistico decida il destino dell'universo e che ogni lancio di questo dado determini dove gli scienziati troveranno della materia. Ma provoca un certo imbarazzo dover ammettere che i numeri fondamentali su cui si basa la matematica siano stati dispiegati dalla Natura gettando una moneta, decidendo con ciascun lancio il destino di un numero. Casualità e caos sono anatemi per il matematico.

A dispetto della loro casualità, tuttavia, i numeri primi possiedono – più di ogni altra parte del nostro retaggio matematico – un carattere immutabile, universale. I numeri primi esisterebbero anche se noi non ci fossimo evoluti a sufficienza per poterli riconoscere. Come affermò il matematico di Cambridge G.H. Hardy nel suo famoso libro *Apologia di un matematico*, «317 è un numero primo non perché noi pensiamo che sia così o perché la nostra mente è conformata in un modo piuttosto che in un altro, ma *perché è così*, perché la realtà matematica è fatta così».

È probabile che alcuni filosofi siano in disaccordo con questa visione platonica del mondo – con la convinzione che ci sia una realtà assoluta ed eterna al di fuori dell'esistenza umana –, ma secondo me è proprio questo che fa di loro dei filosofi e non dei matematici. In *Pensiero e materia* c'è un dialogo affascinante fra Alain Connes, il matematico che veniva citato nell'e-mail di Bombieri, e il neurobiologo Jean-Pierre Changeux. Nel libro la tensione è palpabile, con Connes che sostiene l'esistenza della matematica al di fuori della mente umana e Changeux determinato a respingere ogni idea di tal genere: «Perché allora non vediamo "$\pi = 3{,}1416$" scritto a lettere d'oro nel cielo o "$6{,}02 \times 10^{23}$" apparire nei riflessi di una sfera di cristallo?». Changeux esprime la propria frustrazione di fronte all'insistenza con cui Connes sostiene che «esiste, indipendentemente dalla mente umana, una realtà matematica pura e immutabile» e che al cuore di quel mondo si trova la sequenza immutabile dei numeri primi. La matematica, dichiara Connes, «è indiscutibilmente il solo linguaggio *universale*». Si può immaginare che dall'altra parte dell'universo esistano una chimica o una biologia differenti, ma i numeri primi rimarranno numeri primi in qualsiasi galassia si conti.

Nel classico romanzo di Carl Sagan *Contact*, gli alieni usano i numeri primi per entrare in contatto con la Terra. Ellie Arroway, l'eroina del libro, lavora al SETI (Search for Extraterrestrial Intelligence), il programma internazionale per la ricerca di segnali di vita intelligente provenienti dallo spazio. Una notte, all'improvviso, mentre sono rivolti in direzione

di Vega, i radiotelescopi captano degli strani impulsi che emergono dal rumore di fondo. Ellie riconosce all'istante il ritmo di quei segnali radio. A due battiti segue una pausa, poi tre battiti, cinque, sette, undici e così via, in una riproduzione di tutti i numeri primi fino a 907. Dopodiché la sequenza ricomincia daccapo.

Quel tamburo cosmico stava eseguendo una musica che i terrestri non avrebbero potuto mancare di riconoscere. Ellie è convinta che solo una forma di vita intelligente possa generare quel ritmo: «È difficile immaginare un plasma irradiante che invia una serie regolare di segnali matematici come questa. I numeri primi servono per attirare la nostra attenzione». Se una civiltà aliena avesse trasmesso i numeri vincenti della lotteria extraterrestre estratti negli ultimi dieci anni, Ellie non sarebbe stata in grado di distinguerli dal rumore di fondo. Ma benché l'elenco dei numeri primi appaia casuale tanto quanto quella dei numeri vincenti di una lotteria, la sua invariabilità universale ha determinato la scelta di ciascuno di essi nella trasmissione aliena. È in questa struttura che Ellie riconosce la firma di una vita intelligente.

Comunicare tramite numeri primi non è soltanto fantascienza. Nel libro *L'uomo che scambiò sua moglie per un cappello*, Oliver Sacks documenta il caso di John e Michael, due gemelli ventiseienni affetti da autismo la cui forma più profonda di comunicazione consisteva nello scambiarsi numeri primi di sei cifre. Sacks racconta di quando li sorprese per la prima volta mentre, nell'angolo di una stanza, si passavano numeri in gran segreto: «Facevano pensare, a tutta pri-

ma, a due esperti assaggiatori intenti a degustare vini rari di annate prestigiose». Da principio Sacks non riesce a figurarsi che cosa stiano combinando i gemelli. Ma non appena riesce a decifrare il loro codice, memorizza alcuni numeri primi di otto cifre che poi, durante l'incontro successivo, lascia astutamente cadere nella conversazione. Alla sorpresa dei gemelli segue un'intensa concentrazione che si trasforma in esultanza quando riconoscono che si tratta di nuovi numeri primi. Ma se Sacks aveva fatto ricorso a delle tavole numeriche per trovare i suoi numeri primi, come facessero i gemelli a generare i loro è un mistero accattivante. Possibile che quei *savants* autistici fossero in possesso di una formula segreta che era sfuggita a intere generazioni di matematici?

La storia dei gemelli è fra le preferite da Bombieri:

> Per me è difficile ascoltare questa storia senza sentirmi intimidito e strabiliato di fronte al funzionamento del cervello. Ma mi chiedo: i miei amici non matematici hanno la stessa reazione? Hanno la più vaga idea di quanto fosse bizzarro, prodigioso e persino ultraterreno il singolare talento che i due gemelli possedevano in modo così naturale? Sono consci del fatto che da secoli i matematici si sforzano di trovare una maniera per fare quello che John e Michael facevano spontaneamente: generare e riconoscere dei numeri primi?

Prima che qualcuno potesse scoprire come ci riuscissero, all'età di trentasette anni i gemelli furono separati dai medici, convinti che quel loro linguaggio numerologico privato

stesse ostacolando il loro sviluppo. Se quei medici avessero ascoltato le conversazioni che si possono sentire nelle sale di ritrovo dei dipartimenti universitari di matematica, probabilmente avrebbero raccomandato di chiudere anche quelle.

È verosimile che i gemelli usassero un trucco basato sul cosiddetto piccolo teorema di Fermat per verificare se un numero fosse primo. Tale metodo di verifica è simile a quello grazie al quale i *savants* autistici riescono a stabilire rapidamente che, per fare un esempio, il 13 aprile 1922 era un giovedì; un exploit in cui i gemelli si esibivano regolarmente nei talk show televisivi. Entrambi i trucchi si basano su una speciale aritmetica detta dell'orologio o modulare. Ma anche se non possedevano una formula magica per individuare i numeri primi, la loro abilità rimaneva straordinaria. Prima di essere separati, erano arrivati a numeri di ventidue cifre, ben oltre il limite massimo delle tavole di numeri primi di cui disponeva Sacks.

Come l'eroina di Sagan che ascolta il battito dei numeri primi cosmici e Sacks che spia il misterioso dialogo numerico dei gemelli, da secoli i matematici si sforzavano di percepire un ordine in quel caos. Nulla sembrava aver senso: era come ascoltare della musica orientale con orecchie occidentali. Poi, a metà del XIX secolo, vi fu una svolta decisiva. Bernhard Riemann prese a osservare il problema in un modo completamente nuovo. Da quella prospettiva inedita, Riemann cominciò a capire qualcosa della struttura che era all'origine del caos dei primi. Sotto il rumore apparente si celava un'armonia sottile e inattesa. Ma a dispetto di quel

grande passo avanti, molti dei segreti della nuova musica rimanevano ancora fuori portata. Riemann, il Wagner del mondo matematico, non si scoraggiò. Fece un'audace previsione sulla musica misteriosa che aveva scoperto. Quella previsione sarebbe diventata nota con il nome di ipotesi di Riemann. Chiunque riuscirà a dimostrare che l'intuizione di Riemann sulla natura di quella musica era corretta, sarà in grado di spiegare perché i numeri primi danno un'impressione così convincente di casualità.

L'intuizione di Riemann fece seguito alla sua scoperta di uno specchio matematico che gli consentiva di scrutare i primi. Quando Alice attraversò il suo specchio, il mondo si capovolse. Nello strano mondo matematico che si trova oltre lo specchio di Riemann, invece, il caos dei primi sembrava trasformarsi in una struttura ordinata più salda di quanto qualsiasi matematico avrebbe potuto sperare. Egli congetturò che, per quanto lontano si fosse spinto lo sguardo nel mondo senza fine oltre lo specchio, quell'ordine si sarebbe mantenuto. L'esistenza ipotizzata da Riemann di un'armonia interna dall'altro lato dello specchio spiegherebbe perché esteriormente i numeri primi sembrano tanto caotici. Per moltissimi matematici la metamorfosi prodotta dallo specchio di Riemann, in cui il caos si tramuta in ordine, è una cosa quasi miracolosa. L'impresa che Riemann affidò al mondo matematico fu di dimostrare che l'ordine che lui pensava di essere riuscito a discernere esisteva davvero.

L'e-mail di Bombieri del 7 aprile 1997 prometteva l'inizio

di una nuova era. La visione di Riemann non era stata un miraggio. L'aristocratico della matematica aveva prospettato ai suoi colleghi l'allettante possibilità che esistesse una spiegazione all'apparente caos dei numeri primi. I matematici non vedevano l'ora di fare razzia dei tanti altri tesori che, come ben sapevano, la soluzione di quel grande problema avrebbe portato alla luce.

Una soluzione dell'ipotesi di Riemann avrà infatti conseguenze enormi per molti altri problemi matematici. I numeri primi sono così fondamentali per l'attività del matematico che l'impatto di un qualsiasi progresso nella comprensione della loro natura sarà fortissimo. L'ipotesi di Riemann sembra un problema impossibile da eludere. Quando ci si muove attraverso il terreno matematico, si ha l'impressione che tutti i percorsi conducano necessariamente alla stessa veduta dell'ipotesi di Riemann, una veduta che incute timore.

Molti hanno paragonato l'ipotesi di Riemann alla scalata del monte Everest. Tanto più a lungo la sua vetta rimane inviolata, quanto più cresce il desiderio di conquistarla. E il matematico che alla fine riuscirà a scalare il monte Riemann verrà certamente ricordato più a lungo di Edmund Hillary. La conquista dell'Everest suscita ammirazione non perché la sua sommità sia un posto particolarmente eccitante in cui stare, ma per la sfida che pone. Sotto questo aspetto l'ipotesi di Riemann differisce in modo significativo dall'ascesa alla montagna più alta del mondo. La vetta di Riemann è un luogo su cui vogliamo installarci perché conosciamo già i panorami che ci si aprirebbero davanti qualora riuscissimo a

raggiungerla. La persona che dimostrerà l'ipotesi di Riemann avrà reso possibile riempire le lacune in migliaia di teoremi che dipendono dalla sua veridicità. Per raggiungere i loro traguardi, molti matematici sono stati costretti a presupporre che l'ipotesi sia vera.

Il fatto che tanti risultati dipendano dalla sfida lanciata da Riemann è la ragione per la quale i matematici la definiscono un'ipotesi invece che una congettura. Il termine «ipotesi» ha la connotazione molto più forte di una supposizione necessaria che un matematico fa per edificare una teoria. Una «congettura», al contrario, rappresenta semplicemente una previsione di come i matematici ritengono che si comporti il loro mondo. Molti hanno dovuto accettare la propria incapacità di risolvere l'enigma di Riemann e non hanno fatto altro che adottare la sua previsione come un'ipotesi di lavoro. Se qualcuno riuscisse a trasformare l'ipotesi in un teorema, tutti quei risultati non dimostrati verrebbero confermati.

Appellandosi all'ipotesi di Riemann, i matematici stanno mettendo in gioco la loro reputazione, nella speranza che un giorno qualcuno dimostrerà che l'intuizione di Riemann era corretta. C'è chi non si limita ad adottarla come ipotesi di lavoro. Per Bombieri, il fatto che i numeri primi si comportino come previsto dall'ipotesi di Riemann è un articolo di fede. In sostanza è diventata una pietra angolare nella ricerca della verità matematica. Ma se si rivelerà falsa, l'ipotesi di Riemann distruggerà completamente la fiducia che abbiamo nella nostra capacità di intuire come funzionano le cose. Sia-

mo ormai così certi del fatto che Riemann avesse ragione che l'alternativa richiederà una revisione radicale del nostro modo di concepire il mondo matematico. In particolare, tutti i risultati che crediamo esistano oltre la vetta di Riemann svanirebbero nel nulla.

Ma per i matematici una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann significherebbe soprattutto la possibilità di disporre di una procedura molto rapida e assolutamente certa per individuare un numero primo di cento cifre, tanto per dire, o di qualsiasi altro numero di cifre vi vada di scegliere. «E con ciò?» potreste legittimamente chiedere. A meno che non siate matematici, l'idea che questo fatto possa avere conseguenze importanti sulla vostra vita vi sembrerà assai improbabile.

Trovare numeri primi di cento cifre appare inutile quanto contare gli angeli che stanno sulla capocchia di uno spillo. La maggior parte della gente riconosce che la matematica è alla base della costruzione di un aeroplano o dello sviluppo della tecnologia elettronica, ma pochi si aspetterebbero che l'esoterico mondo dei numeri primi abbia un impatto significativo sulla loro vita. Di fatto, ancora negli anni Quaranta del secolo scorso G.H. Hardy la pensava allo stesso modo: «Tanto un Gauss quanto dei matematici meno importanti possono a buona ragione rallegrarsi del fatto che qui c'è comunque una scienza [la teoria dei numeri] la cui stessa lontananza dalle ordinarie attività umane dovrebbe mantenere amabile e pura».

Ma più di recente, una nuova piega degli eventi ha visto i

numeri primi conquistare il centro della scena nel mondo sporco e spietato del commercio. I numeri primi non sono più confinati nella cittadella matematica. Negli anni Settanta tre scienziati, Ron Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, hanno trasformato la ricerca dei numeri primi da un gioco disinteressato che si praticava nelle torri d'avorio del mondo accademico in una seria applicazione commerciale. Sfruttando una scoperta fatta da Pierre de Fermat nel XVII secolo, i tre hanno escogitato un modo di usare i numeri primi per proteggere i numeri delle nostre carte di credito mentre viaggiano per i centri commerciali elettronici del mercato globale. Quando l'idea fu proposta per la prima volta negli anni Settanta, nessuno poteva lontanamente immaginarsi le dimensioni che il commercio elettronico avrebbe raggiunto. Ma oggi, questo tipo di commercio non potrebbe esistere senza la potenza dei numeri primi. Ogni volta che ordinate qualcosa su un sito web, il vostro computer usa la sicurezza fornita dall'esistenza di numeri primi di cento cifre. Il sistema è chiamato RSA, dalle iniziali dei nomi dei suoi tre inventori. A oggi sono più di un milione i numeri primi che sono già stati usati per proteggere il mondo del commercio elettronico.

Ogni attività commerciale su Internet deve perciò affidarsi a numeri primi di cento cifre per mantenere la sicurezza nelle proprie transazioni. Alla fine, il ruolo in espansione di Internet porterà a identificare ciascuno di noi per mezzo di numeri primi personali. Sapere come una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann possa contribuire a comprendere il

modo in cui i primi si distribuiscono nell'universo dei numeri ha assunto d'improvviso un interesse commerciale.

La cosa straordinaria è che se la *costruzione* di questo codice di sicurezza dipende dalle scoperte sui numeri primi compiute da Fermat più di trecento anni fa, la sua *decifrazione* dipende da un problema che non siamo ancora in grado di risolvere. La sicurezza della cifratura RSA dipende dalla nostra incapacità di rispondere a questioni fondamentali sui numeri primi. Siamo in grado di capire una metà dell'equazione ma non l'altra. Quanto più penetriamo nel mistero dei numeri primi, tuttavia, tanto meno sicuri diventano questi codici usati in Internet. I numeri primi sono le chiavi delle serrature che proteggono i segreti elettronici del mondo. Ecco perché aziende come la AT&T o la Hewlett-Packard stanno investendo fior di quattrini nel tentativo di comprendere le sottigliezze dei numeri primi e l'ipotesi di Riemann. Ciò che si riuscirà a scoprire potrebbe servire a violare quei codici. È questa la ragione per la quale la teoria dei numeri e il business hanno stretto una così strana alleanza. Il mondo degli affari e i servizi di sicurezza tengono ben d'occhio le lavagne dei matematici puri.

Non erano dunque solo i matematici ad agitarsi per l'annuncio di Bombieri. Quella soluzione dell'ipotesi di Riemann avrebbe provocato un crollo del commercio elettronico? Agenti dell'NSA, l'Agenzia per la sicurezza nazionale statunitense, furono inviati a Princeton per scoprirlo. Ma mentre matematici e agenti del controspionaggio elettronico si recavano a Princeton, molte persone cominciavano a

subodorare qualcosa di sospetto nell'e-mail di Bombieri. È vero che alle particelle elementari sono stati assegnati alcuni nomi folli: gluoni, iperoni csi, mesoni incantati, quark, quest'ultimo per gentile concessione di James Joyce. Ma «moroni»? Certamente no!* Bombieri ha una reputazione ineguagliabile come conoscitore di ogni più piccolo particolare dell'ipotesi di Riemann, ma chi lo conosce personalmente sa anche che possiede un perfido senso dell'umorismo.

Anche l'ultimo teorema di Fermat era inciampato in un pesce d'aprile spuntato fuori subito dopo la scoperta di una lacuna nella dimostrazione che Andrew Wiles aveva proposto a Cambridge. Con l'e-mail di Bombieri, la comunità matematica si era lasciata turlupinare un'altra volta. Ansiosi di rivivere il fermento sollevato dalla dimostrazione del teorema di Fermat, i matematici si erano precipitati sull'esca lanciata loro da Bombieri. E il piacere di inoltrare quell'e-mail fece sì che, mentre si diffondeva rapidamente, la data del 1° aprile scomparisse dalla fonte originale. Se a questo si aggiunge il fatto che l'e-mail fu letta in nazioni in cui il concetto di pesce d'aprile non esisteva, si capisce perché la burla ebbe molto più successo di quanto il suo autore avrebbe potuto immaginare. Alla fine Bombieri dovette confessare che la sua e-mail era uno scherzo. Mentre il XXI secolo si approssimava, restavamo completamente all'oscuro della natura dei numeri più fondamentali della matematica. Erano i numeri primi a farsi l'ultima risata.

* In inglese *moron* significa «ritardato mentale», «deficiente». [N.d.T.]

Enrico Bombieri, professore dell'Institute
for Advanced Study di Princeton.

Come mai i matematici erano stati tanto ingenui da prestar fede a Bombieri? Non sono certo persone disposte a cedere i loro trofei con leggerezza. Prima di poter dichiarare che un risultato è stato dimostrato, i matematici esigono il superamento di verifiche severissime, molto più severe di quelle che in altre discipline sono considerate sufficienti. Come comprese Wiles quando emerse una lacuna nella sua prima dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat, completare il novantanove per cento del puzzle non basta: a essere ricordata è la persona che mette al suo posto l'ultima tessera. E spesso l'ultima tessera rimane introvabile per anni.

La ricerca della fonte segreta che alimentava i numeri pri-

mi era in corso da oltre due millenni. La brama di quell'elisir aveva reso i matematici fin troppo vulnerabili all'inganno di Bombieri. Per anni, la sola idea di avvicinarsi in qualche modo a quel problema notoriamente difficile aveva terrorizzato molti di loro. Ma con il secolo che stava per chiudersi, accadde un fatto singolare: erano sempre più numerosi i matematici disposti a parlare della possibilità di affrontarlo. La dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat non fece che alimentare la speranza che i grandi problemi potessero essere risolti.

I matematici avevano apprezzato l'interesse che la soluzione di Wiles a Fermat aveva convogliato su di loro proprio in quanto matematici. Non c'è dubbio che questa sensazione contribuì al desiderio di credere a Bombieri. Del tutto inaspettatamente, Andrew Wiles si vedeva chiedere di posare per una pubblicità della Gap indossando pantaloni *chino*. Era una bella sensazione. Essere un matematico ti faceva sentire quasi sexy. I matematici passano tantissimo tempo in un mondo che li riempie di eccitazione e di piacere. E tuttavia è un piacere che di rado hanno l'opportunità di condividere con il resto del mondo. Ecco che ora si presentava l'occasione di sfoggiare un trofeo, di mettere in mostra i tesori scoperti nei loro viaggi lunghi e solitari.

Una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann sarebbe stata una degna conclusione matematica per il XX secolo, un secolo che si era aperto con la sfida diretta lanciata da Hilbert ai matematici di tutto il mondo perché risolvessero quell'enigma. Dei ventitré problemi dell'elenco di Hilbert, l'ipotesi di Riemann era l'unico a entrare nel XXI secolo invitto.

Il 24 maggio 2000, in occasione del centenario della sfida lanciata da Hilbert, matematici e giornalisti si riunirono al Collège de France di Parigi per ascoltare l'annuncio di una nuova raccolta di sette problemi con cui si sfidava la comunità matematica per il terzo millennio. A proporli era un piccolo gruppo di matematici di fama mondiale. Ne facevano parte, fra gli altri, Andrew Wiles e Alain Connes. I sette problemi erano tutti inediti tranne uno, che aveva già fatto parte dell'elenco di Hilbert: l'ipotesi di Riemann. In omaggio agli ideali capitalistici che avevano caratterizzato il XX secolo, queste nuove sfide, l'ipotesi di Riemann e gli altri sei problemi, erano rese più appetibili dall'aggiunta di un premio di un milione di dollari ciascuna. Un sicuro incentivo per il giovane fisico inventato da Bombieri, qualora la gloria non fosse sufficiente a soddisfarlo.

L'idea dei «Problemi del Millennio» è stata concepita da Landon T. Clay, un uomo d'affari di Boston che ha fatto fortuna grazie alla compravendita di fondi comuni d'investimento in un periodo in cui la Borsa andava a gonfie vele. Benché abbia abbandonato gli studi di matematica a Harvard, Clay ha una passione autentica per la disciplina, una passione che vuole condividere. Sa che per i matematici non è il denaro la forza motivante: «Sono il desiderio di verità e la sensibilità alla bellezza e al potere e all'eleganza della matematica che spronano i matematici». Ma Clay non è un ingenuo, e come uomo d'affari sa bene che un milione di dollari potrebbe indurre un nuovo Andrew Wiles a unirsi alla caccia alle soluzioni di questi grandi problemi irrisolti. In effetti, il

sito web del Clay Mathematics Institute, dove i Problemi del Millennio sono esposti al pubblico, è stato sommerso da un tal numero di contatti che non ha retto alla pressione.

I sette Problemi del Millennio sono differenti nello spirito dai ventitré problemi scelti da Hilbert un secolo prima. Hilbert aveva stabilito una nuova agenda per i matematici del Novecento. Molti dei suoi problemi erano inediti e incoraggiavano un significativo cambio di atteggiamento nei confronti della disciplina. A differenza dell'ultimo teorema di Fermat, che induceva a concentrarsi sul particolare, i ventitré problemi di Hilbert spronavano la comunità matematica a pensare in modo più concettuale. Hilbert offriva ai matematici l'opportunità di compiere un volo in mongolfiera a grandi altezze sopra la loro disciplina, incoraggiandoli a comprendere la configurazione globale del terreno invece di esaminare una a una le singole rocce presenti nel paesaggio matematico. Questa impostazione nuova deve molto a Riemann, il quale cinquant'anni prima aveva dato inizio alla rivoluzionaria transizione dalla matematica come una disciplina di formule ed equazioni a una disciplina di idee e teoria astratta.

La scelta dei sette problemi per il nuovo millennio è stata più conservatrice. Questi sono i Turner nella galleria d'arte dei problemi matematici, laddove le questioni poste da Hilbert rappresentavano una collezione più modernista, d'avanguardia. Il conservatorismo dei nuovi problemi è imputabile in parte al desiderio che le soluzioni siano sufficientemente ben definite perché i solutori possano ricevere il premio da un milione di dollari. I Problemi del Millennio sono que-

stioni che i matematici conoscono da alcuni decenni e, nel caso dell'ipotesi di Riemann, da oltre un secolo. Sono una raccolta di classici.

I sette milioni di dollari messi in palio da Clay non rappresentano il primo caso in cui si offre del denaro per la soluzione di problemi matematici. Per aver dimostrato l'ultimo teorema di Fermat, nel 1997 Wiles incassò 75.000 marchi tedeschi grazie al premio messo in palio da Paul Wolfskehl nel 1908. Era stata proprio la storia del premio Wolfskehl ad attrarre l'attenzione di Wiles su Fermat, alla suggestionabile età di dieci anni. Clay ritiene che se con il suo premio riuscirà a fare altrettanto per l'ipotesi di Riemann, sarà un milione di dollari ben speso. Più di recente due case editrici, la Faber & Faber in Gran Bretagna e la Bloomsbury negli Stati Uniti, hanno offerto un milione di dollari a chi dimostrerà la congettura di Goldbach come trovata pubblicitaria per il lancio del romanzo *Zio Petros e la congettura di Goldbach*, di Apostolos Doxiadis. Per vincere il premio bisognava spiegare perché ogni numero pari può essere scritto come somma di due numeri primi. Tuttavia gli editori non hanno concesso molto tempo a chi voleva cimentarsi con la congettura. La soluzione doveva essere presentata entro la mezzanotte del 15 marzo 2002 e, bizzarramente, il concorso era aperto soltanto ai cittadini britannici e statunitensi.

Secondo Clay, i matematici ricevono scarse ricompense e pochi riconoscimenti per le loro fatiche. Per esempio, non esiste un premio Nobel per la matematica a cui possano aspirare. È invece l'attribuzione di una medaglia Fields a essere

considerata il riconoscimento più importante nel mondo matematico. A differenza dei Nobel, che tendono a essere assegnati a scienziati ormai alla fine della loro carriera per i risultati che hanno ottenuto molto tempo prima, le medaglie Fields sono riservate ai matematici che non hanno ancora compiuto quarant'anni. Questa scelta non si basa sull'opinione generale secondo cui i matematici si logorano in giovane età. John Fields, colui che concepì l'idea e mise a disposizione i fondi per il premio, voleva che le somme assegnate spronassero i matematici più promettenti a raggiungere risultati ancora più importanti. Le medaglie vengono conferite ogni quattro anni in occasione del Congresso internazionale dei matematici. Le prime furono assegnate a Oslo nel 1936.

Il limite massimo d'età è rigidamente rispettato. Nonostante l'impresa straordinaria compiuta da Andrew Wiles dimostrando l'ultimo teorema di Fermat, il comitato del premio non poté conferirgli una medaglia al Congresso di Berlino del 1998, cioè alla prima occasione utile dopo che la sua dimostrazione definitiva era stata accettata, perché Wiles è nato nel 1953. È vero che fu coniata una medaglia speciale per celebrare la sua impresa, ma non c'è paragone con il fatto di essere membro dell'illustre club dei vincitori di una medaglia Fields. Fra coloro che l'hanno ricevuta ci sono molti dei protagonisti più importanti del nostro dramma: Enrico Bombieri, Alain Connes, Atle Selberg, Paul Cohen, Alexandre Grothendieck, Alan Baker, Pierre Deligne. Questi nomi danno conto di quasi un quinto di tutte le medaglie assegnate fino a oggi.

Ma non è per denaro che i matematici aspirano alle medaglie Fields. A differenza delle grosse cifre che ricevono i vincitori di un Nobel, la borsa che accompagna una medaglia Fields contiene la modesta somma di 15.000 dollari canadesi. I milioni di Clay contribuiranno perciò a fare concorrenza al prestigio pecuniario dei premi Nobel. Al contrario di quanto avviene con le medaglie Fields e con il premio offerto dalla Faber & Faber e dalla Bloomsbury per la soluzione della congettura di Goldbach, in questo caso tutti possono aspirare alla vincita in denaro, indipendentemente dall'età o dalla nazionalità, e senza limiti di tempo per trovare le soluzioni, a parte l'inesorabile ticchettio dell'inflazione.

Tuttavia, il più grande incentivo che spinge un matematico ad andare a caccia di uno dei Problemi del Millennio non è la ricompensa in denaro ma la prospettiva inebriante di raggiungere l'immortalità che la matematica può conferire. È vero che risolvendo uno dei problemi di Clay ti metti in tasca un milione di dollari, ma questo non è niente paragonato al fatto di scolpire il tuo nome sulla mappa intellettuale della civiltà. L'ipotesi di Riemann, l'ultimo teorema di Fermat, la congettura di Goldbach, lo spazio di Hilbert, la funzione tau di Ramanujan, l'algoritmo di Euclide, il metodo del cerchio di Hardy-Littlewood, le serie di Fourier, la numerazione di Gödel, uno zero di Siegel, la formula della traccia di Selberg, il crivello di Eratostene, i numeri primi di Mersenne, il prodotto di Eulero, gli interi gaussiani: sono tutte scoperte che hanno reso immortali i matematici responsabili di aver dissepolto quei tesori nel corso dell'esplo-

razione dei numeri primi. I loro nomi sopravvivranno quando ci saremo ormai dimenticati da tempo di quelli di Eschilo, Goethe e Shakespeare. Come spiegava G.H. Hardy, «le lingue muoiono ma le idee matematiche no. "Immortalità" forse è una parola ingenua, ma un matematico ha più probabilità di chiunque altro di raggiungere quello che questa parola designa».

Quei matematici che si sono impegnati a lungo e con fatica in quest'avventura epica per comprendere i numeri primi sono più che semplici nomi incisi sulla stele della matematica. Il percorso tortuoso che ha seguito la storia dei numeri primi è il prodotto di vite vere, di un gruppo ricco e variegato di *dramatis personae*. Figure storiche della Rivoluzione francese e amici di Napoleone cedono il passo a moderni maghi e a imprenditori di Internet. Le storie di un contabile indiano, di una spia francese scampata all'esecuzione e di un ebreo ungherese che fugge alla persecuzione della Germania nazista sono accomunate dall'ossessione per i numeri primi. Nel tentativo di aggiungere il proprio nome al ruolo d'onore matematico, ciascuno di questi personaggi offre una prospettiva unica. I numeri primi hanno unito matematici attraverso molti confini nazionali: Cina, Francia, Grecia, America, Norvegia, Australia, Russia, India e Germania sono solo alcuni dei Paesi da cui sono giunti membri prominenti della tribù nomade dei matematici che ogni quattro anni si riuniscono a un Congresso internazionale per narrare le storie dei loro viaggi.

Non è solo il desiderio di lasciare un'impronta nel passato

a motivare il matematico. Proprio come accadde quando Hilbert osò spingere lo sguardo nell'ignoto, una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann sarebbe l'inizio di una nuova avventura. Quando Wiles ha preso la parola alla conferenza stampa indetta per l'annuncio dei premi Clay, ha tenuto a sottolineare che i problemi non sono la meta finale:

> Là fuori c'è tutto un mondo di matematica che attende di essere scoperto. Pensate, se volete, agli europei del Seicento. Loro sapevano che oltre l'Atlantico c'era un Nuovo Mondo. Che genere di premi avrebbero assegnato per contribuire alla scoperta e allo sviluppo degli Stati Uniti? Non un premio per l'invenzione dell'aeroplano, non un premio per l'invenzione del computer, non un premio per la fondazione di Chicago, non un premio per la costruzione di macchine in grado di mietere campi di frumento. Tutte queste cose sono diventate parte dell'America, ma non le si poteva immaginare nel Seicento. No, avrebbero dato un premio per la soluzione di problemi come quello della longitudine.

L'ipotesi di Riemann è la longitudine della matematica. Una sua soluzione apre la prospettiva di riuscire a tracciare una mappa delle acque brumose dell'immenso oceano dei numeri. Rappresenta appena un inizio della nostra comprensione dei numeri della Natura. Se solo riusciamo a trovare il segreto per orientarci fra i numeri primi, chi sa che cos'altro potrebbe giacere là fuori in attesa che noi lo scopriamo?

2

Gli atomi dell'aritmetica

Quando le cose diventano troppo complicate, qualche volta ha un senso fermarsi e chiedersi: ho posto la domanda giusta?

Enrico Bombieri, *Prime Territory*, in «The Sciences»

Due secoli prima che il pesce d'aprile di Bombieri beffasse il mondo matematico, un altro italiano, Giuseppe Piazzi, diffondeva una notizia altrettanto entusiasmante. Dall'osservatorio astronomico di Palermo, Piazzi aveva scoperto un nuovo pianeta che ruotava attorno al Sole su un'orbita compresa fra quelle di Marte e di Giove. Cerere, come fu battezzato, era molto più piccolo dei sette pianeti maggiori allora conosciuti, ma la sua scoperta, avvenuta il 1° gennaio del 1801, fu considerata da tutti di meraviglioso auspicio per il futuro della scienza nel nuovo secolo.

L'entusiasmo si tramutò in sconforto poche settimane più tardi, quando il piccolo pianeta sparì dalla vista: la sua orbita lo stava conducendo dall'altro lato del Sole, dove la

sua flebile luce finiva ingoiata dall'accecante splendore solare. Cerere era scomparso dal cielo notturno, smarrito di nuovo fra la pletora di stelle del firmamento. Agli astronomi del XIX secolo mancavano gli strumenti matematici per calcolarne l'orbita completa a partire dalla breve traiettoria che erano riusciti a seguire nelle prime settimane del nuovo secolo. Lo avevano perso, e sembrava che non ci fosse modo di prevedere dove avrebbe fatto la sua comparsa successiva.

Tuttavia, quasi un anno dopo che il pianeta di Piazzi si era dileguato, un tedesco ventiquattrenne di Brunswick annunciò di sapere dove gli astronomi avrebbero dovuto cercare l'oggetto smarrito. In mancanza di previsioni alternative a portata di mano, gli astronomi puntarono i loro telescopi verso la regione del cielo indicata da quel giovanotto. Come per incanto, Cerere si trovava proprio lì. Questa previsione astronomica senza precedenti non era, però, la misteriosa magia di un astrologo. Il percorso di Cerere era stato calcolato da un matematico che aveva individuato un ordine laddove altri avevano visto soltanto un minuscolo, imprevedibile pianeta. Carl Friedrich Gauss aveva preso i pochissimi dati sulla traiettoria del pianeta che erano stati registrati e aveva applicato un nuovo metodo di calcolo che lui stesso aveva sviluppato da poco per determinare dove sarebbe stato possibile trovare Cerere in una qualsiasi data futura.

Grazie alla scoperta della traiettoria di Cerere, Gauss divenne all'istante una stella di prima grandezza all'inter-

no della comunità scientifica. La sua impresa era un simbolo del potere predittivo della matematica in un periodo, il primo Ottocento, in cui la scienza era in piena fioritura. Se gli astronomi avevano scoperto il pianeta per caso, era stato un matematico a far uso delle capacità analitiche necessarie per spiegare che cosa sarebbe accaduto in seguito.

Benché il nome di Gauss fosse ancora sconosciuto nella comunità degli astronomi, la sua giovane voce aveva già lasciato un'impronta formidabile nel mondo matematico. Gauss era riuscito a tracciare la traiettoria di Cerere, ma la sua vera passione era quella di individuare strutture regolari nel mondo dei numeri. Per lui, l'universo dei numeri presentava la sfida più importante: trovare struttura e ordine dove altri riuscivano a vedere soltanto caos. «Bambino prodigio» e «genio della matematica» sono epiteti che si attribuiscono con una frequenza davvero eccessiva, ma pochi matematici avrebbero da ridire sul fatto che queste etichette siano assegnate a Gauss. Il semplice numero di nuove idee e scoperte che egli produsse ancor prima di compiere venticinque anni appare inspiegabile.

Gauss era nato nella famiglia di un modesto lavoratore a Brunswick, in Germania, nel 1777. A tre anni correggeva i conti del padre. A diciannove, dopo aver scoperto una magnifica costruzione geometrica di una figura con 17 lati, si convinse del fatto che avrebbe dovuto dedicare la propria vita alla matematica. Prima di lui, gli antichi greci avevano mostrato che era possibile costruire un pentagono perfetto

usando solo una riga e un compasso. Dopo di allora nessuno era stato in grado di mostrare come utilizzare quella semplice attrezzatura per costruire altri poligoni perfetti – poligoni regolari, come li si definisce – con un numero primo di lati. L'eccitazione che Gauss provò quando scoprì una maniera per costruire quella figura perfetta di 17 lati lo spinse a iniziare un diario matematico che avrebbe tenuto per i diciotto anni seguenti. Questo diario, che rimase nelle mani della famiglia fino al 1898, è diventato uno dei documenti più importanti nella storia della matematica, non da ultimo perché confermò che Gauss aveva dimostrato, senza peraltro pubblicarli, molti risultati per la cui riscoperta altri matematici dovettero spingersi ben dentro il XIX secolo.

Uno dei maggiori fra i primi contributi matematici di Gauss fu l'invenzione del «calcolatore a orologio». Non si trattava di una macchina materiale, ma di un'idea che apriva la possibilità di fare aritmetica con numeri che in precedenza erano stati considerati troppo ingombranti. Il calcolatore a orologio funziona in base all'identico principio di un orologio convenzionale. Se il vostro orologio dice che sono le 9 e voi aggiungete 4 ore, la lancetta delle ore si sposterà sull'una. Allo stesso modo, il calcolatore a orologio di Gauss fornirebbe 1 invece di 13 come risultato di $9 + 4$. Se Gauss voleva fare un calcolo più complicato, come ad esempio 7×7, il calcolatore a orologio gli restituiva il resto che si ottiene dividendo 49 (ossia 7×7) per 12. Il risultato è di nuovo 1.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Ma era quando Gauss voleva calcolare $7 \times 7 \times 7$ che la potenza e la velocità del calcolatore a orologio cominciavano a emergere. Invece di moltiplicare un'altra volta 49 per 7, Gauss poteva limitarsi a moltiplicare per 7 l'ultimo risultato ottenuto, cioè 1, per ottenere la risposta, cioè 7. Così, senza dover calcolare $7 \times 7 \times 7$ (che fa 343), egli sapeva con poca fatica che quel risultato diviso per 12 dava resto 7. Il calcolatore dimostrò tutta la sua potenza quando Gauss cominciò a utilizzarlo con grandi numeri, numeri che oltrepassavano le sue stesse capacità di calcolo. Pur non avendo idea di quanto facesse 7^{99}, il suo calcolatore a oro-

logio gli diceva che quel numero diviso per 12 avrebbe dato come resto 7.

Gauss si rese conto che non c'era nulla di speciale negli orologi con 12 ore sul quadrante. Perciò introdusse l'idea di un'aritmetica dell'orologio (o aritmetica modulare, come viene a volte chiamata) basata su orologi con un numero qualsiasi di ore. Per esempio, se inserite il numero 11 in un calcolatore a orologio diviso in 4 ore, la risposta che otterrete sarà 3, dato che 11 diviso per 4 dà come resto 3. Gli studi compiuti da Gauss su questo nuovo tipo d'aritmetica rivoluzionarono la matematica all'inizio del XIX secolo. Così come il telescopio aveva permesso agli astronomi di vedere nuovi mondi, l'invenzione del calcolatore a orologio aiutò i matematici a scoprire nell'universo dei numeri strutture che per generazioni erano rimaste celate alla vista. Ancora oggi l'aritmetica modulare di Gauss è fondamentale per la sicurezza in Internet, dove si utilizzano orologi con quadranti che comprendono più ore degli atomi esistenti nell'universo osservabile.

Gauss, figlio di genitori poveri, ebbe la fortuna di poter mettere a profitto il proprio talento matematico. Era nato in un'epoca in cui la matematica era ancora un'attività privilegiata, finanziata da corti nobiliari e mecenati, o praticata da dilettanti come Pierre de Fermat nel tempo libero. Il signore che proteggeva Gauss era Carlo Guglielmo Ferdinando, duca di Brunswick. La famiglia di Ferdinando aveva sempre sostenuto la cultura e l'economia del ducato. Suo padre aveva fondato il Collegium Carolinum, una delle più antiche università tecniche tedesche. Permeato dell'ethos paterno se-

condo cui l'istruzione era alla base dei successi commerciali di Brunswick, Ferdinando era sempre alla ricerca di talenti che meritassero un sostegno. Si imbatté per la prima volta in Gauss nel 1791, e rimase così impressionato dalle sue capacità che si offrì di finanziare quel giovane perché frequentasse il Collegium Carolinum e potesse così realizzare il proprio evidente potenziale.

Fu con molta gratitudine che Gauss dedicò il suo primo libro al duca nel 1801. Quel libro, intitolato *Disquisitiones arithmeticae*, raccoglieva molte delle scoperte sulle proprietà dei numeri che Gauss aveva registrato nei suoi diari. È opinione generale che quest'opera non sia una semplice raccolta di osservazioni sui numeri, ma il libro che annunciò la nascita della teoria dei numeri come disciplina indipendente. Fu la sua pubblicazione a fare della teoria dei numeri «la Regina della Matematica», come Gauss amò sempre definirla. E se quella teoria era una regina, per Gauss i gioielli incastonati nella sua corona erano i numeri primi, i numeri che avevano affascinato e tormentato generazioni di matematici.

La più antica, incerta prova del fatto che gli uomini erano a conoscenza delle speciali qualità dei numeri primi è un osso risalente al 6500 a.C. L'osso di Ishango, come è chiamato, fu scoperto nel 1950 fra i monti dell'Africa equatoriale centrale. Vi sono incise quattro serie di tacche disposte su tre file. In una delle file si contano 11, 13, 17 e 19 tacche, cioè un elenco completo dei numeri primi compresi fra 10 e 20. E anche le altre file di incisioni sembrano essere di natura matematica. Non è chiaro se quest'antico osso, conservato all'Istituto reale

di scienze naturali di Bruxelles, rappresenti davvero uno dei primi tentativi da parte dei nostri antenati di comprendere i numeri primi oppure se le incisioni siano una selezione casuale di numeri che per caso si trovano a essere primi. Ma non si può escludere che esso costituisca un'affascinante prova della prima incursione umana nella teoria dei numeri primi.

Alcuni ritengono che la civiltà cinese sia stata la prima a sentire il ritmo del tamburo dei numeri primi. I cinesi attribuivano caratteristiche femminili ai numeri pari e maschili ai numeri dispari. Ma oltre a fare questa separazione netta, consideravano quei numeri dispari che non sono primi, come per esempio 15, effeminati. Ci sono prove del fatto che prima del 1000 a.C. i cinesi avessero elaborato un modo molto fisico per comprendere che cos'è che rende i primi, fra tutti i numeri, speciali. Se prendete 15 fagioli, li potete disporre in un perfetto rettangolo composto da tre file di cinque righe. Se però prendete 17 fagioli, l'unico rettangolo che potete costruire è quello formato da una sola riga di 17 fagioli. Per i cinesi, i numeri primi erano numeri virili che resistevano a ogni tentativo di scomporli in un prodotto di numeri più piccoli.

Anche gli antichi greci amavano attribuire qualità sessuali ai numeri, ma furono proprio loro a scoprire, nel IV secolo a.C., la reale potenza dei numeri primi come elementi di base per costruire tutti gli altri numeri. Compresero che ogni numero poteva essere creato moltiplicando fra loro dei numeri primi. Se fecero l'errore di credere che il fuoco, l'aria, l'acqua e la terra fossero gli elementi costitutivi di base della materia, colsero nel segno quando si trattò di identificare gli

atomi dell'aritmetica. Per molti secoli i chimici tentarono invano di identificare i costituenti di base nella loro disciplina, finché la ricerca iniziata dagli antichi greci non culminò nella tavola periodica degli elementi di Dmitrij Mendeleev. Invece, nonostante il vantaggio di cui godono grazie al fatto che già i greci avevano identificato gli elementi di base dell'aritmetica, i matematici si stanno ancora dibattendo nel tentativo di trovare la loro tavola dei numeri primi.

Per quanto ne sappiamo fu Eratostene, gran bibliotecario di quell'importantissimo centro culturale dell'antica Grecia che fu Alessandria, la prima persona ad aver prodotto delle tavole di numeri primi. Come una sorta di antico Mendeleev della matematica, nel III secolo a.C. Eratostene scoprì una procedura ragionevolmente indolore per determinare quali fossero i numeri primi compresi, per fare un esempio, fra 1 e 1.000. Per cominciare scriveva per esteso l'intera sequenza dei mille numeri. Poi prendeva il numero primo più piccolo, cioè 2, e a partire da quello depennava dall'elenco un numero ogni due. Essendo divisibili per 2, tutti quei numeri non erano primi. Quindi passava al numero successivo che non era stato eliminato, ovvero 3, e a partire da quello depennava dall'elenco un numero ogni tre. Dato che tutti questi numeri erano divisibili per 3, anch'essi non erano primi. Continuava così, prendendo il numero successivo che non era stato ancora eliminato dall'elenco e depennando tutti i suoi multipli. Adottando questa procedura sistematica Eratostene compilò delle tavole di numeri primi. In seguito il suo metodo fu battezzato *crivello di Eratostene*. Ogni nuovo numero primo crea

un «crivello», un setaccio che Eratostene utilizza per eliminare una parte dei numeri non primi. A ogni nuova fase del processo le dimensioni delle maglie del setaccio cambiano, e quando Eratostene arriva a 1.000, i soli numeri che sono sopravvissuti al processo di selezione sono primi.

Quando era un ragazzino, Gauss ricevette in regalo un libro che conteneva un elenco di alcune migliaia di numeri primi e probabilmente era stato realizzato adoperando quegli antichi setacci numerici. Agli occhi di Gauss, quei numeri si susseguivano come una cascata disordinata di biglie. Predire l'orbita ellittica di Cerere sarebbe stato già abbastanza difficile. Ma la sfida posta dai numeri primi assomigliava più all'impresa quasi impossibile di analizzare la rotazione di corpi celesti come Iperione, uno dei satelliti di Saturno, che ha la forma di un hamburger. A differenza della nostra Luna, Iperione non è per nulla stabile dal punto di vista gravitazionale e perciò gira caoticamente su se stesso. Tuttavia, anche se la rotazione di Iperione e le orbite di alcuni asteroidi sono caotiche, sappiamo almeno che il loro comportamento è determinato dall'attrazione gravitazionale del Sole e dei pianeti. Ma riguardo ai numeri primi nessuno aveva la più pallida idea di che cosa li tirasse e spingesse. Quando scrutava le sue tavole numeriche, Gauss non riusciva a scorgere alcuna regola che gli dicesse di quanto avrebbe dovuto saltare per trovare il numero primo successivo. Possibile che i matematici dovessero rassegnarsi ad accettare il fatto che quei numeri fossero stati scelti a caso dalla Natura, che fossero fissati come stelle nel cielo notturno, senza capo né coda? Gauss non poteva accettare un'idea di quel genere. La

motivazione primaria nella vita di un matematico è trovare strutture ordinate, scoprire e spiegare le regole che stanno a fondamento della Natura, prevedere che cosa accadrà poi.

La ricerca di strutture nascoste

L'avventura di ricerca dei numeri primi da parte del matematico è espressa perfettamente da uno dei compiti che tutti noi abbiamo affrontato a scuola. Data una successione di numeri, trovare l'elemento seguente. Ecco, a titolo di esempio, tre problemi da risolvere:

1, 3, 6, 10, 15, ...
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, ...

Sono molte le domande che balzano alla mente matematica di fronte a elenchi numerici di questo tipo. Qual è la regola che sta dietro alla creazione di ciascuna sequenza? È possibile predire quale sarà il numero successivo? È possibile trovare una formula che produca il centesimo numero della sequenza senza che si debbano calcolare i 99 che lo precedono?

La prima delle tre sequenze soprascritte è costituita da quelli che vengono chiamati *numeri triangolari*. Il decimo numero dell'elenco è il numero di fagioli necessari per costruire un triangolo di dieci file partendo da una fila di un solo fagiolo e terminando con una fila di dieci. Perciò l'*N*-esimo

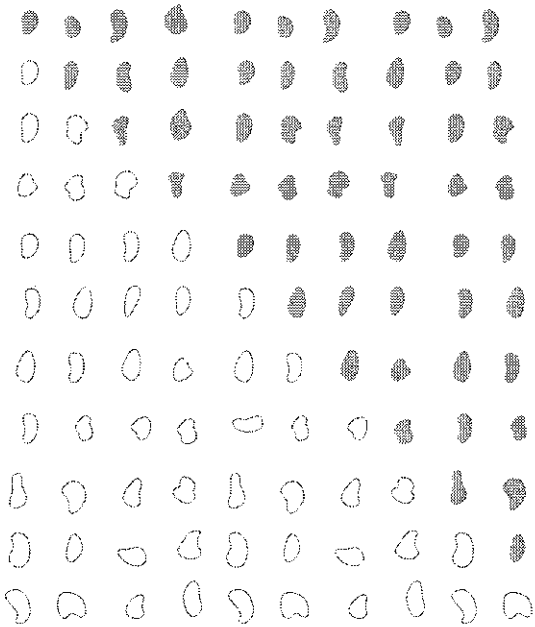
numero triangolare si ottiene semplicemente sommando i primi N numeri: $1 + 2 + 3 + ... + N$. Se volete trovare il centesimo numero triangolare, avete a disposizione un metodo lungo e laborioso: attaccare il problema frontalmente sommando i primi 100 numeri della sequenza.

In effetti il maestro di scuola di Gauss amava assegnare questo problema alla classe, poiché sapeva che i suoi allievi ci impiegavano sempre così tanto a risolverlo che nel frattempo lui si sarebbe potuto concedere un pisolino. Man mano che gli scolari finivano il compito, dovevano alzarsi e andare a posare le loro lavagnette, con la risposta scritta sopra, in una pila davanti al maestro. Mentre gli altri allievi cominciavano appena a sgobbare, in pochi secondi il decenne Gauss aveva già posato la sua lavagnetta sulla scrivania. Furioso, il maestro pensò che il giovane Gauss facesse l'insolente. Ma quando guardò la lavagnetta, la risposta era lì – 5.050 – senza un solo passaggio nei calcoli. Il maestro pensò che Gauss doveva aver imbrogliato in qualche modo, ma lo scolaro spiegò che tutto quello che bisognava fare era inserire $N = 100$ nella formula $\frac{1}{2} \times (N + 1) \times N$, e si sarebbe ottenuto il centesimo numero della sequenza senza doverne calcolare nessun altro.

Gauss non aveva attaccato il problema in maniera diretta, ma gli si era accostato di lato. Il modo migliore per scoprire quanti fagioli ci fossero in un triangolo di 100 file, aveva ragionato, era prendere un triangolo di fagioli uguale, di ruotarlo e di porlo accanto al primo. Ora Gauss aveva un rettangolo di 101 righe di 100 fagioli ciascuna. Calcolare il numero totale di fagioli di questo rettangolo costituito da due

triangoli era facile: i fagioli sono in tutto $101 \times 100 = 10.100$. Perciò un solo triangolo doveva contenere la metà di questo numero di fagioli, ovvero $\frac{1}{2} \times 101 \times 100 = 5.050$. E non c'è nulla di speciale nel numero 100. Se lo si sostituisce con N si ottiene la formula $\frac{1}{2} \times (N+1) \times N$.

La figura che segue illustra il ragionamento per un triangolo composto da 10 righe invece che da 100.



Un'illustrazione del metodo usato da Gauss per dimostrare la sua formula per il calcolo dei numeri triangolari.

Invece di attaccare frontalmente il problema proposto dal suo maestro, Gauss aveva trovato un angolo diverso da cui guardarlo. Il pensiero laterale, la capacità di rovesciare un problema o di rivoltarlo per vederlo da una prospettiva nuova, è un tema di immensa importanza per le scoperte matematiche ed è una delle ragioni per le quali le persone che sanno ragionare come il giovane Gauss sono dei buoni matematici.

La seconda successione proposta, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., è formata dai cosiddetti *numeri di Fibonacci*. Per costruirla si calcola ciascun numero sommando i due che lo precedono. Per esempio, 13 = 5 + 8. Leonardo Fibonacci, un matematico pisano del XIII secolo, vi si era imbattuto in relazione alle abitudini di accoppiamento dei conigli. Fibonacci aveva tentato di portare la matematica europea fuori dai secoli bui dell'Alto Medioevo divulgando le scoperte dei matematici arabi. Senza successo.

Furono invece i conigli a conferirgli l'immortalità nel mondo matematico. Secondo il suo modello di riproduzione, ogni nuova stagione avrebbe visto il numero di coppie di conigli crescere seguendo uno schema regolare. Questo schema si basava su due regole: ciascuna coppia matura di conigli produrrà una nuova coppia di conigli a stagione, e ciascuna nuova coppia avrà bisogno di una stagione per raggiungere la maturità sessuale.

Ma i numeri di Fibonacci non governano soltanto il mondo dei conigli. In Natura questa successione spunta fuori in mille modi diversi. Il numero di petali di un fiore è invariabilmente un numero di Fibonacci, così come il nu-

mero di spirali in una pigna d'abete. E la crescita di una conchiglia marina nel tempo rispecchia la progressione dei numeri di Fibonacci.

Esiste una formula rapida che, come quella di Gauss per i numeri triangolari, permetta di ricavare il centesimo numero di Fibonacci? Anche in questo caso la prima impressione è che sia necessario calcolare tutti e 99 i numeri che lo precedono, dato che per ricavare il centesimo numero bisogna sommare il novantottesimo e il novantanovesimo. È possibile che ci sia una formula che ci fornisca questo centesimo numero inserendovi semplicemente il numero 100? Una tale formula esiste, ma scovarla si rivela molto più complicato, a dispetto della semplicità della regola per generare questi numeri.

La formula per generare i numeri di Fibonacci si basa su un numero speciale chiamato *rapporto aureo*, un numero che comincia con 1,618 03... Come π, il rapporto aureo è un numero la cui espansione decimale non ha fine, né manifesta alcuna regolarità. E tuttavia esso racchiude quelle che nel corso dei secoli molti hanno considerato le proporzioni perfette. Se esaminate le tele esposte al Louvre o alla Tate Gallery, scoprirete che molto spesso l'artista ha scelto un rettangolo i cui lati stanno nella proporzione di 1 a 1,618 03... E gli esperimenti rivelano che fra l'altezza di una persona e la distanza che separa i suoi piedi dal suo ombelico si predilige lo stesso rapporto numerico. L'apparizione del rapporto aureo in Natura ha qualcosa di arcano. L'*N*-esimo numero di Fibonacci può essere espresso per mezzo di una formula costruita a partire dall'*N*-esima potenza del rapporto aureo.

Vi lascerò la terza successione numerica – 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, ... – come una sfida stimolante su cui torneremo in seguito. Le sue proprietà contribuirono a consolidare la fama di uno dei personaggi più affascinanti della matematica del XX secolo, Srinivasa Ramanujan, che possedeva un'abilità straordinaria nello scoprire nuove strutture e nuove formule in aree della matematica dove altri si erano cimentati senza successo.

In Natura non si trovano solo i numeri di Fibonacci. Il regno animale conosce anche i numeri primi. Esistono due specie di cicale chiamate *Magicicada septendecim* e *Magicicada tredecim* che spesso vivono nello stesso ambiente. Hanno cicli di vita di 17 e 13 anni rispettivamente. Per tutti questi anni tranne l'ultimo rimangono nel terreno alimentandosi con la linfa delle radici degli alberi. Poi, nell'ultimo anno del ciclo, compiono la metamorfosi da ninfe ad adulti completamente formati ed emergono in massa dal terreno. È un evento straordinario quando, ogni 17 anni, gli esemplari di *Magicicada septendecim* si impadroniscono della foresta in una sola notte. Emettono il loro canto sonoro, si accoppiano, si alimentano, depositano le uova. Poi, dopo sei settimane, muoiono. La foresta torna silenziosa per altri 17 anni. Ma perché queste due specie hanno scelto come durata della loro vita un numero primo di anni?

Ci sono diverse spiegazioni possibili. Siccome entrambe le specie hanno sviluppato cicli di vita che durano un numero primo d'anni, capiterà molto di rado che si sincronizzino per emergere nello stesso anno. In effetti le due specie do-

vranno dividersi la foresta solo una volta ogni $13 \times 17 = 221$ anni. Immaginate che cosa succederebbe se avessero scelto cicli composti da numeri d'anni non primi, per esempio 18 e 12. Nello stesso periodo di 221 anni si troverebbero in sincronia ben sei volte, e precisamente negli anni 36, 72, 108, 144, 180 e 216, cioè in quelli composti dagli stessi numeri primi che sono i costituenti elementari sia di 18 che di 12. I numeri primi 13 e 17, d'altro canto, evitano alle due specie di cicale una competizione eccessiva.

L'evoluzione di un fungo che emergeva in simultanea con le cicale offre un'altra possibile spiegazione. Per le cicale quel fungo era letale, perciò hanno sviluppato un ciclo di vita che permettesse di evitarlo. Passando a un ciclo della durata di 17 o di 13 anni, ovvero di un numero primo d'anni, le cicale si sono garantite la certezza di emergere negli stessi anni del fungo molto meno spesso di quanto accadrebbe se i loro cicli di vita durassero un numero non primo d'anni. Per le cicale, i numeri primi non erano una semplice curiosità astratta ma la chiave per la sopravvivenza.

Ma se l'evoluzione aveva portato alla luce alcuni numeri primi per le cicale, i matematici volevano un metodo più sistematico per individuare quei numeri. Di tutti gli enigmi numerici, era l'elenco dei numeri primi quello per il quale i matematici cercavano, più che per ogni altro, una formula segreta. Tuttavia bisogna andarci cauti con la speranza che nel mondo matematico strutture e ordine siano dappertutto. Nel corso della storia sono stati molti coloro che si sono persi nel vano tentativo di trovare una struttura nascosta nell'e-

spansione decimale di π, uno dei numeri più importanti della matematica. Ma è proprio la sua importanza ad aver alimentato tentativi disperati di scoprire messaggi sepolti nella sua caotica espansione decimale. Se una vita aliena usava i numeri primi per catturare l'attenzione di Ellie Arroway all'inizio del romanzo di Carl Sagan *Contact*, l'ultimo messaggio che compare nel libro è sepolto in profondità nell'espansione di π, in cui compare all'improvviso una serie di 0 e di 1, definendo i contorni di uno schema che dovrebbe rivelare «l'esistenza di un'intelligenza antecedente all'universo». Anche il film di Darren Aronofsky *Pi greco, il teorema del delirio* gioca su questa popolare immagine culturale.

Come avvertimento per coloro che sono affascinati dall'idea di scoprire messaggi nascosti in numeri come π, i matematici sono riusciti a dimostrare che la maggioranza dei numeri decimali nascondono da qualche parte all'interno delle loro infinite espansioni qualsiasi sequenza di numeri stiate cercando. Perciò ci sono buone probabilità che π contenga il programma di computer per scrivere il libro della Genesi se lo cercate abbastanza a lungo. Insomma, bisogna individuare il giusto punto di vista da cui cercare le strutture nascoste nella matematica. π non è importante perché la sua espansione decimale contiene messaggi nascosti. La sua importanza diventa evidente quando lo si esamina da una prospettiva diversa. La stessa cosa valeva per i numeri primi. Armato delle sue tavole di numeri primi e del suo talento per il pensiero laterale, Gauss era pronto a cogliere l'angolo e la prospettiva giusti da cui esaminare i numeri primi in modo che

da dietro la facciata di caos potesse emergere un ordine in precedenza celato.

La dimostrazione, il documentario di viaggio del matematico

Se trovare schemi e strutture nel mondo della matematica è una parte di quello che fa un matematico, l'altra parte è *dimostrare* che una certa struttura rimarrà sempre valida. Il concetto di dimostrazione segna forse il vero inizio della matematica come arte della deduzione invece che come semplice osservazione numerologica, il punto in cui l'alchimia matematica cede il passo alla chimica matematica. Gli antichi greci furono i primi a comprendere che era possibile dimostrare che certi fatti rimangono veri per quanto lontano ci si spinga a contare, per quanti esempi si esaminino.

Il processo creativo matematico inizia con una supposizione. Spesso la supposizione emerge dall'intuito che il matematico sviluppa dopo anni di esplorazione del mondo della matematica, coltivando una sensibilità per le sue tante circonvoluzioni. Talvolta, semplici esperimenti numerici rivelano una regola che si può supporre valga sempre. Nel XVII secolo, per esempio, i matematici scoprirono quello che ritenevano potesse essere un metodo a prova d'errore per verificare se un numero N fosse primo: elevare 2 alla N e dividere il risultato per N. Se il resto fosse risultato uguale a 2, allora N avrebbe dovuto essere un numero primo. Facendo riferi-

mento al calcolatore a orologio di Gauss, quei matematici cercavano di calcolare 2^N su un orologio con N ore. La sfida è allora quella di dimostrare che tale supposizione è vera oppure falsa. Sono queste supposizioni o predizioni che il matematico chiama «congetture» o «ipotesi».

Una supposizione matematica ottiene il nome di «teorema» solo una volta che ne è stata fornita una dimostrazione. È questo passaggio dalla «congettura» o «ipotesi» al «teorema» che segna la maturità matematica di un argomento. Fermat lasciò alla matematica una montagna di predizioni. Generazioni successive di matematici si sono fatte un nome dimostrando la verità o la falsità delle ipotesi di Fermat. È pur vero che l'ultimo teorema di Fermat è sempre stato chiamato un teorema e mai una congettura. Ma si tratta di un caso insolito, che probabilmente si verificò perché nelle note scarabocchiate sulla sua copia dell'*Arithmetica* di Diofanto Fermat aveva sostenuto di possederne una meravigliosa dimostrazione che purtroppo era troppo lunga per stare dentro il margine della pagina. Fermat non trascrisse mai da nessuna parte la sua presunta dimostrazione, e quei commenti a margine divennero la più grande beffa matematica della storia. Finché Andrew Wiles non fornì un'argomentazione, una dimostrazione del perché non esistevano soluzioni interessanti alle equazioni di Fermat, l'ultimo teorema rimase una mera ipotesi, nulla più di un pio desiderio.

L'episodio scolastico di Gauss riassume perfettamente il passaggio dalla supposizione al teorema attraverso la dimostrazione. Gauss aveva concepito una formula che, prevede-

va, avrebbe prodotto qualsiasi numero triangolare si desiderasse. Come poteva avere la certezza che la formula avrebbe funzionato sempre? Di certo non poteva fare la verifica su ogni numero della successione per controllare che il risultato fosse corretto, dato che la successione ha una lunghezza infinita. Fece invece ricorso all'arma potente della dimostrazione matematica. Il suo metodo, combinare due triangoli per costruire un rettangolo, assicurava che la formula avrebbe sempre funzionato senza bisogno di fare un numero infinito di calcoli. Al contrario, il metodo ideato nel XVII secolo per verificare se un numero fosse primo in base al calcolo di 2^N fu respinto dal tribunale della matematica nel 1819. Il metodo funziona correttamente fino a 340, ma poi individua in 341 un numero primo. È qui che la verifica fallisce, dato che $341 = 11 \times 31$. Quest'eccezione non venne scoperta finché non fu possibile usare un calcolatore a orologio di Gauss con 341 ore sul quadrante per semplificare l'analisi di un numero come 2^{341}, un numero che su un calcolatore convenzionale si estende oltre le 100 cifre.

G.H. Hardy, l'autore dell'*Apologia di un matematico*, soleva paragonare il processo della scoperta e della dimostrazione matematiche al lavoro di un cartografo che studia paesaggi lontani: «Ho sempre pensato a un matematico in primo luogo come a un osservatore, un uomo che scruta una remota catena di montagne e annota le proprie osservazioni». Una volta che il matematico ha osservato una montagna in lontananza, il suo compito successivo è spiegare agli altri come raggiungerla.

Si inizia in un luogo dove il paesaggio è familiare e non ci

sono sorprese. Dentro i confini di questa regione conosciuta si trovano gli assiomi della matematica, le verità ovvie che riguardano i numeri, insieme alle proposizioni che sono già state dimostrate. Una dimostrazione è come un sentiero che, attraverso il paesaggio matematico, conduce da questo territorio familiare fino a vette remote. L'avanzamento è vincolato al rispetto delle regole della deduzione che, come le mosse consentite a un pezzo degli scacchi, prescrivono i passi che è possibile compiere in questo mondo. A volte si arriva a quello che sembra un punto morto, ed è necessario fare uno di quei caratteristici passi laterali, cambiare direzione o persino tornare indietro per trovare un modo di aggirarlo. Talvolta è necessario attendere che vengano inventati nuovi strumenti, come i calcolatori a orologio di Gauss, perché sia possibile continuare l'ascesa.

Nelle parole di Hardy, l'osservatore matematico

> vede nitidamente A, mentre di B riesce a ottenere solo delle brevi visioni momentanee. Alla fine scorge un crinale che parte da A e, seguendolo fino in fondo, scopre che culmina in B. Se desidera che qualcun altro lo veda, glielo indica, o direttamente oppure attraverso la catena di sommità che hanno condotto lui stesso a riconoscerlo. Quando il suo allievo lo vede a sua volta, la ricerca, l'argomentazione, la dimostrazione è terminata.

La dimostrazione è la storia del viaggio e la mappa che ne registra le coordinate. È il libro di bordo del matematico.

Coloro che leggeranno una dimostrazione sperimenteranno lo stesso emergere della comprensione che ha sperimentato il suo autore. Non solo vedranno finalmente la strada che conduce alla vetta, ma capiranno anche che nessuno sviluppo futuro potrà compromettere quel nuovo percorso. Molto spesso una dimostrazione non cerca di mettere tutti i puntini sulle i. È una descrizione del viaggio e non necessariamente la ricostruzione di ogni singolo passo compiuto. Le argomentazioni che i matematici forniscono come dimostrazioni si propongono di produrre un afflusso di sangue nella mente del lettore. Hardy usava descrivere le argomentazioni che noi matematici forniamo come «*gas*, svolazzi retorici ideati per colpire la psicologia, figure sulla lavagna durante la lezione, strumenti per stimolare l'immaginazione degli allievi».

Il matematico è ossessionato dalla dimostrazione, e la semplice prova sperimentale di un'ipotesi matematica non lo soddisfa. Questo atteggiamento è spesso oggetto di stupore e persino di scherno in altre discipline scientifiche. La congettura di Goldbach è stata verificata per tutti i numeri fino a 400.000.000.000.000 ma non è stata accettata come teorema. In quasi tutte le altre discipline scientifiche si sarebbe felici di considerare questi dati numerici schiaccianti come un argomento più che convincente e si passerebbe a qualcos'altro. Se poi un giorno dovessero spuntare nuovi dati che impongono di riconsiderare quel canone matematico, allora lo si farà. Se per le altre scienze va bene così, perché non per la matematica?

Moltissimi matematici rabbrividirebbero al pensiero di

una tale eresia. Per dirla con le parole di André Weil, matematico francese, «il rigore è per i matematici quello che la moralità è per gli uomini». Ciò è dovuto in parte al fatto che in matematica spesso gli indizi sono molto difficili da valutare. Rivelare la vera natura dei numeri primi, poi, prende molto tempo, più di quanto accada in qualsiasi altra area della matematica. Persino Gauss si lasciò ingannare dall'enorme quantità di dati a sostegno di un'intuizione che aveva avuto sui numeri primi, ma una successiva analisi teorica svelò l'abbaglio di cui era stato vittima. È per questo che una dimostrazione è essenziale: le prime impressioni possono essere ingannevoli. Mentre l'ethos di tutte le altre scienze stabilisce che le prove sperimentali sono la sola cosa a cui ci si può affidare davvero, i matematici hanno imparato a non fidarsi mai dei dati numerici in assenza di una dimostrazione.

Sotto certi aspetti, la natura intangibile della matematica come disciplina della mente rende il matematico più propenso a fornire dimostrazioni per assegnare un senso di realtà a questo mondo. I chimici possono serenamente studiare la struttura di una molecola di buckminsterfullerene, che è un'entità reale; il sequenziamento del genoma presenta un problema concreto al genetista; persino i fisici possono avvertire la realtà delle minuscole particelle subatomiche o di un remoto buco nero. Ma il matematico si trova a dover cercare di comprendere oggetti che non possiedono alcuna realtà fisica evidente: forme geometriche in otto dimensioni o numeri primi così grandi che eccedono il numero di atomi esistenti nell'universo. Quando si è di fronte a una tavolozza

di concetti astratti di questo tipo, la mente può giocare strani scherzi, e senza una dimostrazione c'è il rischio di creare un castello di carte. Nelle altre discipline scientifiche l'osservazione fisica e l'esperimento rassicurano sulla realtà di un oggetto di studio. Ma se altri scienziati possono usare gli occhi per vedere questa realtà fisica, i matematici si affidano alla dimostrazione matematica, come a un sesto senso, per venire a capo del loro invisibile oggetto di studio.

Cercare di dimostrare l'esistenza di regolarità che sono già state individuate è anche un grande catalizzatore per altre scoperte matematiche. Molti matematici ritengono che sarebbe meglio se i problemi di questo tipo non venissero mai risolti, tenuto conto della matematica nuova e meravigliosa che si incontra mentre si procede verso la loro soluzione. Tali problemi offrono la possibilità di condurre un tipo di esplorazione che obbliga i matematici ad attraversare territori di cui non si sarebbero mai immaginati l'esistenza all'inizio del loro viaggio.

Ma forse l'argomento più convincente per spiegare perché la cultura della matematica dia tanto valore al fatto di dimostrare che un'asserzione è vera è che, a differenza delle altre scienze, essa concede il lusso di poterlo fare. In quante altre discipline esiste qualcosa di paragonabile alla possibilità di affermare che la formula di Gauss per i numeri triangolari non mancherà *mai* di dare la risposta corretta? Forse la matematica è una materia eterea, circoscritta alla mente, ma la sua mancanza di realtà tangibile è più che compensata dalle certezze che forniscono le dimostrazioni.

A differenza di quanto accade nelle altre scienze, in cui i

modelli del mondo possono sgretolarsi da una generazione alla successiva, in matematica la dimostrazione ci permette di stabilire con una certezza del cento per cento che i fatti riguardanti i numeri primi non cambieranno alla luce delle scoperte future. La matematica è una piramide in cui ogni generazione edifica sulle realizzazioni di quella che l'ha preceduta senza dover temere che ci sia un crollo. È questa indistruttibilità a rendere così appassionante essere un matematico. Per nessuna altra scienza si può affermare che ciò che fu stabilito dagli antichi greci continua a rimanere vero. Oggi possiamo ridere della loro idea secondo cui la materia era composta di fuoco, aria, acqua e terra. E forse le generazioni future guarderanno all'elenco di 109 atomi che compongono la tavola periodica degli elementi di Mendeleev con lo stesso disprezzo con cui noi consideriamo il modello del mondo chimico elaborato dai greci. Al contrario, tutti i matematici iniziano la loro formazione imparando quello che gli antichi greci dimostrarono sui numeri primi.

I membri degli altri dipartimenti universitari invidiano la certezza che la dimostrazione dà al matematico tanto quanto la irridono. La stabilità creata dalla dimostrazione matematica conduce all'autentica immortalità a cui faceva riferimento Hardy. Spesso è questa la ragione per cui le persone circondate da un mondo di incertezze sono attratte verso la disciplina. In tantissimi casi il mondo matematico ha offerto un rifugio a giovani menti desiderose di evadere da un mondo reale che non riuscivano a fronteggiare.

La nostra fede nell'indistruttibilità di una dimostrazione

si rispecchia nelle regole che governano l'assegnazione dei premi per i solutori dei Problemi del Millennio di Clay. Il premio in denaro viene assegnato due anni dopo che la dimostrazione è stata pubblicata e con l'assenso dell'intera comunità matematica. Naturalmente questo non garantisce affatto che nella dimostrazione non ci sia un errore, ma riconosce un fatto che tutti noi condividiamo, e cioè che è possibile individuare gli errori presenti nelle dimostrazioni senza dover attendere per anni che emergano nuove prove. Se un errore c'è, deve essere lì nella pagina che sta davanti a noi.

Sono arroganti i matematici a ritenere di aver accesso a dimostrazioni assolute? Si può sostenere che la dimostrazione del fatto che qualsiasi numero è esprimibile come prodotto di numeri primi ha le stesse probabilità di essere demolita di quelle che hanno la fisica newtoniana o la teoria di un atomo indivisibile? La maggioranza dei matematici pensa che le indagini future non faranno mai crollare gli assiomi che sono considerati verità lampanti relative ai numeri. Secondo loro, le leggi della logica che si adottano per edificare sopra quelle fondamenta, se applicate correttamente, produrranno dimostrazioni di asserzioni sui numeri che non saranno mai invalidate da nuove intuizioni. Forse è un'idea ingenua dal punto di vista filosofico, ma certamente è il principio fondamentale della setta dei matematici.

C'è poi l'eccitazione emotiva che il matematico prova mentre traccia nuovi percorsi attraverso il paesaggio della matematica. C'è un'incredibile sensazione di euforia nello scoprire una via per raggiungere la sommità di un monte

lontano che è visibile da generazioni. È come creare una storia meravigliosa o un brano musicale che trasporta la mente dal familiare all'ignoto. Essere il primo a intravedere la possibile esistenza di una remota montagna come l'ultimo teorema di Fermat o l'ipotesi di Riemann è grandioso. Ma non ha paragoni con la soddisfazione di attraversare le terre che vi conducono. Persino coloro che ripercorrono la pista tracciata da quel primo pioniere proveranno almeno in parte il senso di elevazione spirituale che ha accompagnato il primo momento di epifania nella scoperta di una nuova dimostrazione. E questa è la ragione per cui i matematici continuano a dar valore alla ricerca della dimostrazione anche se sono totalmente convinti del fatto che qualcosa come l'ipotesi di Riemann sia vera. Perché in matematica il viaggio è importante quanto la conquista della meta.

La matematica è un atto di creazione oppure un atto di scoperta? Molti matematici oscillano fra la sensazione di essere creativi e quella di scoprire verità scientifiche assolute. Spesso le idee matematiche possono apparire molto personali e legate alla mente creativa che le ha concepite. Tuttavia quest'impressione è controbilanciata dalla convinzione che la natura logica della disciplina implica che tutti i matematici vivono in uno stesso mondo matematico, un mondo pieno di verità immutabili. Queste verità attendono soltanto di essere dissotterrate, e non c'è quantità di pensiero creativo che possa mettere in discussione la loro esistenza. Hardy esprime perfettamente questa tensione fra creazione e scoperta con cui ogni matematico si trova a combattere: «Ritengo che la realtà

matematica si situi al di fuori di noi, che la nostra funzione sia quella di scoprirla o di osservarla e che i teoremi che dimostriamo e descriviamo con magniloquenza come nostre "creazioni" non siano altro che le note delle nostre osservazioni». Ma in altri momenti egli opta per una descrizione più artistica del processo del fare matematica. «La matematica non è una disciplina contemplativa ma creativa» scrisse in *Apologia di un matematico*, un libro che Graham Greene ha posto accanto ai taccuini di Henry James come la miglior descrizione di che cosa significhi essere un artista creativo.

Sebbene i numeri primi, insieme ad altri elementi della matematica, trascendano le barriere culturali, molta matematica è creativa ed è un prodotto della psiche umana. Spesso le dimostrazioni, le storie che i matematici raccontano della loro disciplina, possono essere narrate in modi diversi. È probabile che a orecchie aliene la dimostrazione di Wiles dell'ultimo teorema di Fermat suonerebbe tanto misteriosa quanto il ciclo dell'*Anello* di Wagner. La matematica è un'arte creativa soggetta a regole rigide, come scrivere poesie o suonare il blues. I matematici sono vincolati ai passi logici che devono compiere nel dar forma alle loro dimostrazioni. E tuttavia all'interno di tali rigide regole rimane ancora una grande libertà. In effetti, la bellezza di creare obbedendo a un sistema di regole è data dal fatto che sei spinto in nuove direzioni e trovi cose che non ti saresti mai aspettato di scoprire se fossi stato lasciato a te stesso. I numeri primi sono come le note di una scala musicale, e ciascuna cultura ha scelto di suonare queste note nel proprio modo specifico, rivelando più di quanto ci si potrebbe

aspettare sulle influenze sociali e storiche. La storia dei numeri primi è uno specchio sociale quanto lo è la scoperta di verità eterne. Nel XVII e nel XVIII secolo l'amore traboccante per le macchine si rispecchiò in un approccio molto pratico, sperimentale allo studio dei numeri primi; al contrario, l'Europa delle rivoluzioni produsse un'atmosfera che favorì l'applicazione di idee astratte, nuove e audaci, alla loro analisi. La scelta di come narrare il viaggio attraverso il mondo matematico è qualcosa di peculiare di ogni singola cultura.

Le favole di Euclide

I primi a narrare queste storie furono gli antichi greci. Furono loro a comprendere il potere della dimostrazione per creare i percorsi definitivi che nel mondo matematico conducono alle montagne. Una volta raggiunte, svaniva per sempre la paura che quelle montagne fossero un remoto miraggio matematico. Per esempio, come facciamo a essere davvero sicuri che non esistano alcuni numeri anomali che non possono essere costruiti moltiplicando fra loro dei numeri primi? Gli antichi greci concepirono un ragionamento che non avrebbe lasciato dubbi nelle loro menti né in quelle delle generazioni future sul fatto che tali numeri anomali non sarebbero mai potuti comparire.

Spesso i matematici scoprono una dimostrazione applicando la teoria generale che stanno cercando di dimostrare a un caso particolare e tentando poi di capire perché la teoria è vera

per quel caso. Sperano che l'argomentazione o la ricetta che ha avuto successo una volta funzioni sempre, indipendentemente dal caso particolare che hanno scelto di analizzare. Per esempio, per dimostrare che ogni numero è un prodotto di numeri primi, potreste cominciare considerando il caso particolare del numero 140. Supponete di aver verificato che ogni numero minore di 140 è un numero primo oppure è il prodotto di numeri primi. Che cosa potete dire del numero 140? È possibile che sia un numero anomalo, che cioè non sia primo ma non sia nemmeno uguale a un prodotto di numeri primi? Innanzitutto scoprireste che non è un numero primo. In che modo? Mostrando che è possibile scriverlo come prodotto di due numeri più piccoli. Per esempio che è uguale a 4×35. A questo punto il più è fatto, dato che avete già stabilito che 4 e 35, numeri inferiori alla nostra presunta anomalia, 140, possono essere scritti come prodotti di numeri primi: 4 è uguale a 2×2 e 35 è uguale a 5×7. Unendo queste informazioni, verifichiamo che in effetti 140 è il prodotto di $2 \times 2 \times 5 \times 7$. Dunque, in definitiva, 140 non è un numero anomalo.

Gli antichi greci trovarono il modo di tradurre questo esempio particolare in un argomento generale che si sarebbe applicato a tutti i numeri. La cosa curiosa è che il loro ragionamento inizia chiedendoci di immaginare che *esistano* dei numeri anomali, numeri che né sono primi né possono essere scritti come prodotto di numeri primi. Se questi numeri anomali esistono, allora quando passiamo in rassegna l'intera sequenza dei numeri dobbiamo prima o poi imbatterci nel più piccolo di essi. Lo chiameremo *N*. Poiché questo

ipotetico numero *N* non è un numero primo, dobbiamo essere in grado di scriverlo come prodotto di due numeri *A* e *B* più piccoli di *N*. Se non fosse possibile farlo, infatti, *N* sarebbe un numero primo.

Dato che *A* e *B* sono più piccoli di *N*, la nostra definizione di *N* comporta che *A* e *B* possano essere espressi come prodotti di numeri primi. Perciò se moltiplichiamo fra loro tutti i primi che compongono *A* per tutti i primi che compongono *B*, dobbiamo necessariamente ottenere il numero *N*. A questo punto abbiamo mostrato che *N* può essere scritto come prodotto di numeri primi, e ciò contraddice la definizione di *N*. Ma allora la nostra ipotesi di partenza, che cioè esistano numeri anomali, non è sostenibile. Quindi ogni numero deve essere primo oppure deve potersi esprimere come prodotto di numeri primi.

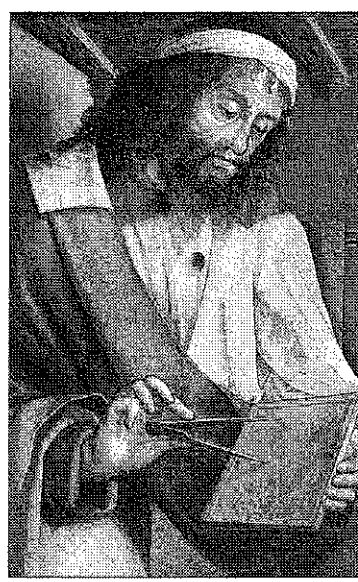
Quando ho provato a esporre questo ragionamento ad alcuni amici, costoro hanno avuto la sensazione che da qualche parte si nascondesse un imbroglio. C'è qualcosa di vagamente subdolo nel nostro gambetto d'apertura: si ipotizza che esistano cose che non vogliamo esistano e si finisce per dimostrare che non esistono. Questa strategia di pensare l'impensabile divenne uno strumento potente per la costruzione delle dimostrazioni da parte degli antichi greci. Essa si basa su un principio logico: un'affermazione deve essere vera oppure falsa. Se partiamo dal presupposto che l'affermazione sia falsa e finiamo in contraddizione, possiamo dedurne che il nostro presupposto era sbagliato e concludere che l'affermazione deve essere vera.

La tecnica di dimostrazione ideata dagli antichi greci fa leva sulla pigrizia di buona parte dei matematici. Invece di affrontare il compito impossibile di eseguire infiniti calcoli espliciti per dimostrare che tutti i numeri possono essere costruiti utilizzando numeri primi, il ragionamento astratto cattura l'essenza di ognuno di quei calcoli. È come conoscere il modo per salire una scala infinita senza dover portare a termine fisicamente l'impresa.

Euclide, più di ogni altro matematico greco, è considerato il padre dell'arte della dimostrazione. Visse ad Alessandria attorno al 300 a.C., nel periodo in cui Tolomeo I vi aveva da poco fondato quello che oggi chiameremmo un grande istituto di ricerca. Fu lì che scrisse uno dei manuali più autorevoli di tutta la storia nota: gli *Elementi*. Nella prima parte del libro Euclide fissò gli assiomi della geometria che descrivono le relazioni fra punti e linee. Questi assiomi furono enunciati come verità lampanti sugli oggetti geometrici, così che poi la geometria potesse fornire una descrizione matematica del mondo fisico. Dopodiché Euclide utilizzò le leggi della deduzione per produrre cinquecento teoremi di geometria.

La parte centrale degli *Elementi* di Euclide riguarda le proprietà dei numeri, ed è qui che troviamo quello che molti considerano il primo esempio davvero brillante di ragionamento matematico. Nella Proposizione 20, Euclide spiega una verità semplice ma fondamentale sui numeri primi: ce ne sono infiniti. Egli parte dal presupposto che ogni numero può essere costruito moltiplicando fra loro dei numeri primi. Su questo edifica la successiva dimostra-

zione. Se i numeri primi sono gli elementi di base di tutti gli altri numeri è possibile, si domanda, che di tali elementi di base ne esista solo un numero finito? La tavola periodica degli elementi chimici fu opera di Mendeleev, e nella sua forma attuale classifica 109 atomi diversi con i quali è possibile costruire tutta la materia. La stessa cosa non potrebbe essere vera per i numeri primi? E se un Mendeleev della matematica avesse presentato a Euclide un elenco di 109 numeri primi e lo avesse sfidato a dimostrare che da quell'elenco ne mancava qualcuno?



Euclide (350-300 a.C. circa).

Perché, per esempio, non è possibile costruire tutti i numeri semplicemente moltiplicando diverse combinazioni dei numeri primi 2, 3, 5 e 7? Euclide pensò a come si sarebbero potuti cercare dei numeri che non fossero il prodotto di nessuno di quei quattro primi. «Beh non è difficile» potreste dire. «Basta prendere il numero primo successivo, 11.» Che non si possa ottenere 11 utilizzando 2, 3, 5 e 7 è certo. Ma prima o poi questa strategia è destinata a fallire perché, ancora oggi, non abbiamo la più pallida idea di come stabilire in maniera certa dove sarà il numero primo successivo. E a causa di questa imprevedibilità Euclide dovette tentare un approccio diverso nella sua ricerca di un metodo che funzionasse indipendentemente da quanto fosse lungo l'elenco dei primi.

Se l'idea fu davvero di Euclide o se invece egli si limitò a registrare idee che altri avevano escogitato ad Alessandria, noi non abbiamo modo di saperlo. Comunque sia, Euclide riuscì a mostrare come fosse sempre possibile costruire un numero che non si poteva costruire utilizzando un qualsiasi elenco di numeri primi scelto a piacere. Prendiamo per esempio i primi 2, 3, 5 e 7. Euclide ne faceva il prodotto ottenendo $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$, poi – e qui sta il colpo di genio – aggiungeva 1 al prodotto per ottenere 211. In tal modo Euclide aveva costruito un numero, 211, che non era divisibile esattamente per nessuno dei primi dell'elenco, cioè 2, 3, 5 e 7. Aggiungendo 1 al prodotto, si garantiva che la divisione per un numero primo dall'elenco avrebbe sempre dato 1 di resto.

Ora, poiché Euclide sapeva che tutti i numeri si costruiscono moltiplicando tra loro dei numeri primi, ciò doveva

valere anche per 211. E siccome 211 non è divisibile per 2, 3, 5 o 7, dovevano per forza esserci altri numeri primi che moltiplicati tra loro avrebbero dato come risultato 211. In questo particolare esempio, 211 è esso stesso un numero primo. Euclide non sosteneva che il numero ottenuto con la sua procedura sarebbe sempre risultato primo, ma soltanto che doveva essere formato dal prodotto di numeri primi che non erano nell'elenco fornitogli dal nostro Mendeleev della matematica.

Per esempio, supponiamo che qualcuno sostenga che tutti i numeri possono essere costruiti utilizzando l'elenco finito di numeri primi 2, 3, 5, 7, 11 e 13. In questo caso il numero che si ottiene con il metodo escogitato da Euclide è $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30.031$, che non è un numero primo. Tutto quello che Euclide affermava era che, dato un qualsiasi elenco finito di numeri primi, lui era sempre in grado di concepire un numero che era il prodotto di numeri primi non compresi in quell'elenco. Nel caso particolare di 30.031, i numeri primi necessari per costruirlo sono 59 e 509. Ma in generale Euclide non era in grado di trovare l'esatto valore di quei nuovi numeri primi. Sapeva solo che dovevano esistere.

Era un'argomentazione meravigliosa. Euclide non aveva idea di come produrre esplicitamente dei numeri primi, ma era in grado di dimostrare che i primi non si sarebbero mai esauriti. Una cosa sorprendente è che noi non sappiamo se i numeri di Euclide comprendano infiniti numeri primi, e tuttavia essi sono sufficienti a dimostrare che devono esistere infiniti numeri primi. Con la dimostrazione di Euclide svaniva la possibilità di costruire una tavola periodica che com-

prendesse tutti i numeri primi o di scoprire un genoma dei numeri primi in grado di codificarne a miliardi. Limitandoci a collezionare esemplari non arriveremo mai a comprendere questi numeri. Ecco qual era, dunque, la sfida finale: il matematico, dotato di armamento limitato, che si scaglia contro l'estensione infinita dei numeri primi. Come potremmo mai riuscire a tracciare un percorso attraverso un tale caos infinito di numeri e a individuare una struttura che ci permetta di prevedere il loro comportamento?

Caccia ai numeri primi

Per generazioni si è tentato senza successo di compiere dei passi avanti nella comprensione dei numeri primi rispetto a Euclide, e le speculazioni interessanti sono state molte. Ma come amava dire Hardy, docente di matematica a Cambridge, «ogni sciocco può porre questioni sui numeri primi alle quali il più saggio degli uomini non può rispondere». Con la congettura dei numeri primi gemelli, per esempio, ci si chiede se esistano infiniti numeri primi p tali che $p + 2$ sia anch'esso un numero primo. Una coppia di numeri primi gemelli è formata da 1.000.037 e 1.000.039. (Notate che questa è la minima distanza possibile fra due numeri primi, dato che N e $N+1$ non possono essere entrambi primi – tranne quando $N = 2$ – poiché almeno uno di essi è divisibile per 2.) È possibile che i fratelli gemelli di Sacks, i *savants* autistici, possedessero una speciale capacità di individuare questi numeri gemelli? Euclide

dimostrò duemila anni fa che esistono infiniti numeri primi, ma nessuno sa se esiste un numero oltre il quale non ci sono più queste coppie di primi ravvicinati. Si ritiene che esistano infiniti primi gemelli. Ma se le supposizioni sono una cosa, la dimostrazione rimane il traguardo finale.

I matematici cercavano, con vari gradi di successo, di escogitare formule che, pur non generando tutti i numeri primi, producessero però un elenco di primi. Fermat pensò di averne trovata una. La sua ipotesi era che elevando 2 alla 2^N e poi aggiungendo 1, il numero risultante $2^{2^N} + 1$ sarebbe stato un numero primo. Questo numero è chiamato l'N-esimo numero di Fermat. Per esempio, prendendo $N = 2$ ed elevandolo a $2^2 = 4$, si ottiene 16. Aggiungendo 1 si ottiene il numero primo 17, che è il secondo numero di Fermat. Fermat credeva che la sua formula gli avrebbe fornito sempre un numero primo, ma questa si è rivelata una delle poche occasioni in cui cadde in errore. I numeri di Fermat diventano molto grandi molto rapidamente. Il quinto numero di Fermat ha già dieci cifre ed era al di fuori della portata dei suoi calcoli. È anche il più piccolo numero di Fermat a non essere un numero primo, dato che è divisibile per 641.

I numeri di Fermat erano molto cari a Gauss. Il fatto che 17 sia uno dei numeri primi di Fermat è la chiave grazie alla quale Gauss riuscì a costruire la sua figura geometrica perfetta di 17 lati. Nel suo grande trattato *Disquisitiones arithmeticae*, Gauss dimostra perché, se l'N-esimo numero di Fermat è un numero primo, è possibile realizzare una costruzione geometrica di N lati usando soltanto una riga e un com-

passo. Il quarto numero di Fermat, 65.537, è primo, è ciò significa che con questi strumenti davvero elementari è possibile costruire una figura geometrica perfetta con 65.537 lati.

A oggi i numeri di Fermat non hanno prodotto che quattro numeri primi, ma Fermat ebbe un maggior successo nel portare alla luce alcune delle proprietà molto speciali che i numeri primi possiedono. Egli scoprì un fatto curioso relativo a quei numeri primi che – come 5, 13, 17 e 29 – divisi per 4 danno resto 1. Tali numeri primi possono sempre essere scritti come somma di due quadrati. Per esempio, $29 = 2^2 + 5^2$. Questa è un'altra delle beffe di Fermat. Sebbene sostenesse di possederne la dimostrazione, mancò di mettere per iscritto la gran parte dei dettagli.

Il giorno di Natale del 1640, Fermat scrisse della sua scoperta – che era possibile esprimere certi numeri primi come somma di due quadrati – in una lettera inviata a un monaco francese di nome Marin Mersenne. Gli interessi di Mersenne non si limitavano alle questioni liturgiche. Egli amava la musica e fu il primo a elaborare una teoria coerente degli armonici. Amava anche i numeri. Mersenne e Fermat tenevano una corrispondenza regolare sulle loro scoperte matematiche. Mersenne divenne famoso per il suo ruolo di intermediario nella comunità scientifica internazionale del Seicento: attraverso di lui, i matematici potevano diffondere le loro idee.

Come era accaduto a intere generazioni di matematici, anche Mersenne fu preso dalla smania di scoprire un ordine nei numeri primi. E anche se non riuscì a trovare una formula che producesse tutti i primi, ne escogitò una che a lun-

go andare si è dimostrata molto più efficace per scoprire numeri primi di quanto non lo sia la formula di Fermat. Anch'egli, come Fermat, partì prendendo in considerazione le potenze di 2. Ma invece di aggiungere 1 al risultato come aveva fatto Fermat, Mersenne decise di sottrarre 1. Per esempio, $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$, che è un numero primo. Forse gli fu d'aiuto l'intuito musicale. Raddoppiando la frequenza di una nota la si eleva di un'ottava, e dunque le potenze di 2 producono note armoniche. D'altra parte è naturale aspettarsi che uno spostamento di frequenza pari a 1 dia luogo a una nota molto dissonante, incompatibile con tutte le frequenze che la precedono, una «nota prima».

Mersenne scoprì rapidamente che la sua formula non avrebbe dato sempre un numero primo. Per esempio, $2^4 - 1 = 15$. Egli capì che se n non era primo allora non c'era modo che $2^n - 1$ lo fosse. Ma affermò con baldanza che, per valori di n non superiori a 257, $2^n - 1$ sarebbe risultato primo solo e soltanto se n fosse stato uguale a uno dei seguenti numeri: 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 67, 127, 257. Aveva scoperto un fatto seccante: persino quando n era un numero primo, ciò non garantiva che $2^n - 1$ lo fosse. Mersenne era in grado di calcolare a mano $2^{11} - 1$, ottenendo 2.047, che è uguale a 23×89. Generazioni di matematici si sono stupiti della capacità di Mersenne di asserire che un numero grande come $2^{257} - 1$ fosse primo. È un numero di 77 cifre. Possibile che il monaco avesse accesso a una qualche mistica formula aritmetica che gli diceva perché quel numero, assolutamente al di fuori delle capacità di calcolo umane, era primo?

I matematici ritengono che se si proseguisse nell'elenco di Mersenne, si troverebbero infiniti valori di n tali per cui i corrispondenti numeri di Mersenne $2^n - 1$ risultano numeri primi. Ma manca ancora una dimostrazione del fatto che questa supposizione sia vera. Siamo ancora in attesa di un Euclide dei nostri giorni che dimostri che i primi di Mersenne non si esauriscono mai. O forse questa vetta remota è soltanto un miraggio.

Molti matematici della generazione di Fermat e di Mersenne si erano trastullati con le interessanti proprietà numerologiche dei numeri primi, ma i loro metodi non erano all'altezza dell'antico ideale greco di dimostrazione. Questo spiega in parte perché Fermat non fornì i dettagli di molte delle dimostrazione che sosteneva di aver scoperto. In quel periodo c'era una chiara mancanza d'interesse a fornire simili spiegazioni logiche. I matematici erano pienamente soddisfatti di un approccio più empirico alla loro disciplina, una disciplina in cui, in un mondo sempre più meccanico, i risultati trovavano giustificazione nelle loro applicazioni pratiche. Nel XVIII secolo, tuttavia, comparve sulla scena un personaggio che avrebbe ridato un senso al valore della dimostrazione in matematica. Il matematico svizzero Leonardo Eulero, nato nel 1707, trovò delle spiegazioni per molte delle regolarità che Fermat e Mersenne avevano scoperto ma non erano riusciti a giustificare. In seguito i metodi di Eulero avrebbero avuto un ruolo fondamentale per l'apertura di nuove finestre teoriche sulla nostra comprensione dei numeri primi.

Eulero, l'aquila matematica

La parte centrale del XVIII secolo fu un periodo di mecenatismo di corte. Era l'Europa prerivoluzionaria, in cui le nazioni erano rette da despoti illuminati: Federico il Grande a Berlino, Pietro il Grande e Caterina la Grande a San Pietroburgo, Luigi XV e Luigi XVI a Parigi. Sotto il loro patronato si finanziavano le accademie che diedero impulso allo sviluppo intellettuale dell'Illuminismo. Per quei sovrani, il fatto di circondarsi di intellettuali nelle loro corti era un marchio di distinzione. Ed erano ben consapevoli della potenzialità delle scienze e della matematica per accrescere le capacità militari e industriali delle nazioni che reggevano.

Il padre di Eulero era un pastore e sperava che suo figlio lo seguisse nella carriera ecclesiastica. Tuttavia, i precoci talenti matematici di Eulero avevano richiamato l'attenzione dei potenti. Ben presto le accademie di tutta Europa presero a corteggiarlo. Fu tentato di iscriversi all'Accademia di Parigi, che in quel tempo era diventata il centro mondiale dell'attività matematica. Scelse invece di accettare l'offerta che ricevette nel 1726 dall'Accademia delle scienze di San Pietroburgo, il coronamento della campagna promossa da Pietro il Grande per migliorare l'istruzione in Russia. Lì avrebbe raggiunto degli amici di Basilea che avevano stimolato il suo interesse per la matematica quand'era un bambino. Loro gli scrissero da San Pietroburgo chiedendogli se potesse portare dalla Svizzera quindici libbre di caffè, una libbra del miglior tè verde, sei bottiglie di brandy, dodici dozzine di pipe di

buon tabacco e qualche dozzina di mazzi di carte da gioco. Carico di regali, il giovane Eulero impiegò sette settimane per completare il lungo viaggio in nave, a piedi e in carrozza postale. Raggiunse infine San Pietroburgo nel maggio 1727 per seguire i suoi sogni matematici. La produzione successiva di Eulero fu così vasta che cinquant'anni dopo la sua morte, avvenuta nel 1783, l'Accademia di San Pietroburgo stava ancora pubblicando del materiale che era conservato nei suoi archivi.

Leonardo Eulero (1707-1783).

Il ruolo del matematico di corte è illustrato perfettamente da un episodio accaduto nel periodo in cui Eulero si trovava a San Pietroburgo. Caterina la Grande aveva come ospite il famoso filosofo e ateo francese Denis Diderot. Diderot ebbe sempre un atteggiamento alquanto sprezzante nei confronti della matematica, sostenendo che non aggiungeva nulla all'esperienza e serviva soltanto a interporre un velo fra gli uomini e la Natura. Caterina, tuttavia, si stancò presto del suo ospite, non a causa delle sue idee denigratorie sulla matematica, ma per i suoi irritanti tentativi di scuotere la fede religiosa dei cortigiani. Eulero fu subito chiamato a corte affinché contribuisse a zittire quell'ateo insopportabile. Per gratitudine verso il mecenatismo di Caterina, Eulero acconsentì prontamente e si rivolse a Diderot in tono solenne di fronte alla corte riunita. «Signore, $(a + b^n)/n = x$, dunque Dio esiste; risponda». Si dice che, davanti a un assalto matematico tanto impetuoso, Diderot sia indietreggiato.

È probabile che questo aneddoto, raccontato dal famoso matematico inglese Augustus De Morgan nel 1872, sia stato infiorettato per renderlo più appetibile e rispecchi soprattutto il fatto che moltissimi matematici si divertono a umiliare i filosofi. Ma dimostra che le corti reali europee non si consideravano complete senza un manipolo di matematici a far compagnia agli astronomi, agli artisti e ai compositori.

Caterina la Grande non era tanto interessata alle dimostrazioni matematiche dell'esistenza di Dio quanto all'opera di Eulero nei campi dell'idraulica, delle costruzioni navali e della balistica. Gli interessi del matematico svizzero spaziavano

in ogni angolo della matematica del suo tempo. Oltre che di matematica militare Eulero scrisse di teoria della musica, ma paradossalmente il suo trattato fu considerato troppo matematico per i musicisti e troppo musicale per i matematici.

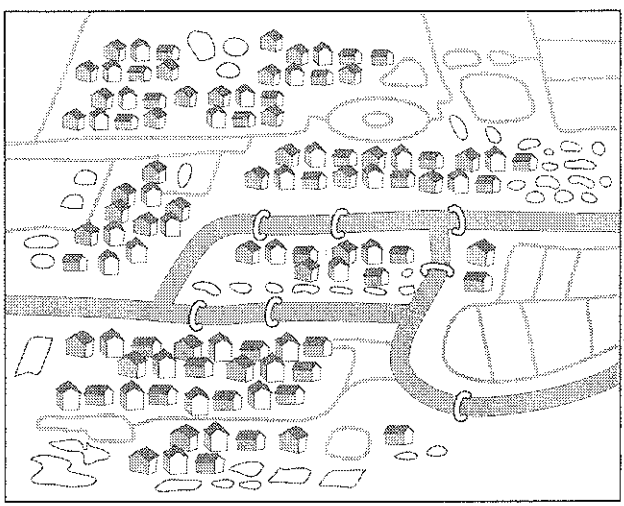
Uno dei suoi trionfi più popolari fu la soluzione del problema dei ponti di Königsberg. Il fiume Pregel, oggi noto con il nome di Pregolya, attraversa la città di Königsberg, che all'epoca di Eulero si trovava in Prussia (oggi si trova in Russia ed è chiamata Kaliningrad). Poiché, dividendosi, il fiume crea due isole nel centro della città, gli abitanti di Königsberg avevano costruito sette ponti per attraversarlo (vedi la figura alla pagina seguente).

Per i suoi cittadini era diventata una sfida scoprire se fosse possibile passeggiare per Königsberg attraversando ciascun ponte una e una sola volta e tornare al punto di partenza. Alla fine, nel 1735, Eulero dimostrò che quell'impresa era impossibile. Spesso la sua dimostrazione è citata come l'origine della topologia, in cui le reali dimensioni fisiche sono irrilevanti per il problema. Era la rete di collegamenti fra le diverse parti della città che contava per la soluzione di Eulero, non le loro reali localizzazioni né le distanze che le dividevano. La mappa della metropolitana londinese offre un'illustrazione di questo principio.

Erano soprattutto i numeri a catturare il cuore di Eulero. Come avrebbe scritto Gauss,

> le bellezze peculiari di questi campi hanno attratto tutti coloro che se ne sono occupati attivamente; ma nessuno ha

espresso questo fatto tanto spesso quanto Eulero, il quale, in quasi tutti i suoi numerosi scritti dedicati alla teoria dei numeri, cita di continuo il diletto che ricava da quelle investigazioni, e il gradito cambiamento che vi trova rispetto a compiti più direttamente collegati ad applicazioni pratiche.



I ponti di Königsberg.

La passione di Eulero per la teoria dei numeri era stata stimolata dalla corrispondenza con Christian Goldbach, un matematico dilettante tedesco che viveva a Mosca e aveva un incarico non ufficiale di segretario presso l'Accademia delle scienze di San Pietroburgo. Come il matematico dilettante Mersenne prima di lui, Goldbach trovava affascinante gioca-

re con i numeri e fare esperimenti numerici. Fu a Eulero che Goldbach comunicò la propria congettura secondo cui era possibile scrivere ogni numero pari come somma di due primi. Dal canto suo Eulero scriveva a Goldbach per chiedergli di verificare molte delle dimostrazioni che egli aveva formulato allo scopo di convalidare il misterioso catalogo delle scoperte compiute da Fermat. A differenza di Fermat, che con la sua reticenza teneva il mondo all'oscuro delle proprie supposte dimostrazioni, Eulero fu ben felice di esibire a Goldbach la sua dimostrazione del fatto che certi numeri primi si possono esprimere come somma di due quadrati, come sosteneva Fermat. Eulero riuscì persino a dimostrare un caso speciale dell'ultimo teorema di Fermat.

A dispetto della sua passione per le dimostrazioni, nel profondo Eulero rimaneva soprattutto un matematico sperimentale. Molte delle sue argomentazioni contenevano passaggi che non erano del tutto rigorosi; che correvano, insomma, sul filo del rasoio. Ciò non lo preoccupava, a patto che conducesse a nuove scoperte interessanti. Come matematico possedeva eccezionali capacità di calcolo ed era abilissimo a manipolare formule matematiche finché non ne emergevano strane connessioni. Come osservò l'accademico di Francia François Arago, «Eulero calcolava senza sforzo apparente, così come gli uomini respirano o le aquile si sostengono nel vento».

Più di ogni altra cosa, Eulero amava calcolare numeri primi. Realizzò tavole di tutti i primi minori di 100.000 e di alcuni più grandi. Nel 1732, fu anche il primo a mostrare

che la formula di Fermat per calcolare numeri primi, $2^{2^N}+1$, smetteva di essere valida per $N=5$. Usando nuove idee teoriche, riuscì a far vedere come fosse possibile spezzare quel numero di dieci cifre nel prodotto di due numeri più piccoli. Una delle sue scoperte più curiose fu una formula che sembrava generare un'inspiegabile quantità di numeri primi. Nel 1772 calcolò tutti i risultati che si ottengono quando si inseriscono i numeri compresi fra 0 e 39 nella formula x^2+x+41.

Ottenne il seguente elenco:

41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1.033, 1.097, 1.163, 1.231, 1.301, 1.373, 1.447, 1.523, 1.601

A Eulero sembrava bizzarro che fosse possibile generare così tanti numeri primi utilizzando quella formula. Comprese che il processo era destinato a interrompersi a un certo punto. Probabilmente vi è già chiaro che quando si inserisce 41 nella formula si ottiene un risultato che è divisibile per 41. Anche per $x = 40$ la formula produce un numero che non è primo.

Nondimeno, Eulero fu molto colpito dalla capacità della sua formula di produrre tanti numeri primi. Cominciò a domandarsi con quali altri numeri diversi da 41 si sarebbe potuto ottenere un risultato simile. Scoprì che oltre a 41 si poteva scegliere anche $q = 2, 3, 5, 11, 17$ perché la formula

$x^2 + x + q$ producesse numeri primi per ogni valore di x compreso fra 0 e $q - 2$.

Ma trovare una formula altrettanto semplice che generasse tutti i numeri primi era un'impresa impossibile persino per il grande Eulero. Come scrisse nel 1751, «ci sono alcuni misteri che la mente umana non penetrerà mai. Per convincercene non dobbiamo far altro che gettare un'occhiata alle tavole di numeri primi. Ci accorgeremo che non vi regna né ordine né legge». Sembra paradossale che gli oggetti fondamentali su cui edifichiamo il mondo pieno d'ordine della matematica debbano comportarsi in modo così sregolato e imprevedibile.

In seguito si scoprì che Eulero era seduto su un'equazione che avrebbe sbloccato l'impasse dei numeri primi. Ma ci sarebbero voluti altri cent'anni, e un'altra grande mente, per rendere evidente ciò che Eulero non era riuscito a mostrare.

Quella mente apparteneva a Bernhard Riemann. Fu però Gauss che, compiendo una delle sue classiche mosse laterali, finì per suggerire a Riemann la nuova prospettiva.

La stima di Gauss

Se secoli di ricerche non erano serviti a portare alla luce una formula magica che generasse l'elenco dei numeri primi, forse era tempo di adottare una strategia diversa. È questo che il quindicenne Gauss pensava nel 1792. L'anno prima aveva

ricevuto in regalo un libro di logaritmi. Fino a pochi decenni fa, le tavole logaritmiche erano familiari a ogni adolescente che faceva calcoli a scuola. Poi, con l'avvento delle calcolatrici tascabili, queste tavole hanno perso il loro ruolo di strumenti fondamentali nella vita quotidiana. Ma centinaia di anni fa ogni navigatore, banchiere e mercante le utilizzava per trasformare difficili moltiplicazioni in semplici addizioni. In fondo al nuovo libro di Gauss c'era anche una tavola di numeri primi. Per Gauss, il fatto che numeri primi e logaritmi comparissero insieme aveva qualcosa di misterioso. Dopo molti calcoli egli aveva infatti notato che fra questi due oggetti apparentemente indipendenti sembrava esserci una connessione.

La prima tavola di logaritmi fu concepita nel 1614, in un'epoca in cui magia e scienza erano compagne inseparabili. Il suo creatore, il barone scozzese Giovanni Nepero, era considerato dai locali uno stregone che praticava le arti oscure. Vestito di nero, un gallo nero come la pece appollaiato sulla spalla, si aggirava con aria furtiva nei dintorni del suo castello borbottando ciò che prediceva la sua algebra apocalittica: che fra il 1688 e il 1700 sarebbe giunto il Giudizio Universale. Ma oltre ad applicare le sue abilità matematiche alle pratiche occulte, Nepero scoprì la magia della funzione logaritmo.

Se inserite nella vostra calcolatrice un numero, per esempio 100, e premete il tasto «log», la calcolatrice produrrà un secondo numero, il logaritmo di 100. Quello che la calcolatrice ha fatto è risolvere un piccolo enigma: ha cercato il numero x che rende l'equazione $10^x = 100$ corretta. In questo

caso specifico la risposta fornita dalla calcolatrice è 2. Se inserite 1.000, un numero dieci volte più grande di 100, la risposta fornita dalla calcolatrice sarà 3. Il logaritmo aumenta di 1. È questa la sua caratteristica fondamentale: il logaritmo trasforma la moltiplicazione in addizione. Ogni volta che *moltiplichiamo* il numero di partenza per dieci, otteniamo il nuovo risultato *aggiungendo* 1 al risultato precedente.

Per i matematici fu un passo di notevole importanza capire che era possibile prendere in considerazione logaritmi di numeri che non erano potenze intere di 10. Per esempio, Gauss sarebbe stato in grado di andare a cercare nelle sue tavole logaritmiche il logaritmo di 128 e scoprire che elevando 10 alla 2,107 21 otteneva un numero molto prossimo a 128. Erano questi calcoli che Nepero aveva raccolto nelle sue tavole del 1614.

Le tavole logaritmiche contribuirono ad accelerare lo sviluppo di quel mondo del commercio e della navigazione che stava fiorendo nel XVII secolo. Grazie al dialogo che i logaritmi creavano fra moltiplicazione e addizione, le tavole trasformavano il problema complesso di moltiplicare due numeri grandi nel compito più semplice di sommare i loro logaritmi. Per moltiplicare grossi numeri, un mercante sommava i loro logaritmi e poi usava le tavole logaritmiche all'inverso per trovare il risultato della moltiplicazione originaria. Il tempo che un marinaio o un venditore risparmiavano grazie queste tavole poteva evitare il naufragio di una nave o il fallimento di un affare.

Ma era la tavola aggiuntiva dei numeri primi posta in fon-

do al suo libro di logaritmi che affascinava il giovane Gauss. Al contrario dei logaritmi, queste tavole di numeri primi non erano altro che una curiosità per chi era interessato alle applicazioni pratiche della matematica. (Le tavole dei numeri primi compilate da Antonio Felkel nel 1776 erano considerate tanto inutili che finirono per essere adoperate come cartucce nella guerra dell'Austria contro la Turchia!) I logaritmi erano molto prevedibili; i numeri primi erano completamente casuali. Sembrava che non ci fosse modo di predire la posizione del più piccolo numero primo maggiore di 1.000, per esempio.

L'importante passo che compì Gauss fu di porsi una domanda diversa. Invece di cercare di prevedere la posizione precisa di un numero primo rispetto a quello precedente, egli tentò di capire se fosse possibile prevedere quanti fossero i numeri primi inferiori a 100, quanti quelli inferiori a 1.000 e così via. Dato un numero N qualsiasi, c'era un modo per stimare quanti fossero i primi compresi fra 1 e N? Per esempio, i numeri primi inferiori a 100 sono 25. Perciò, se scegliamo a caso un numero compreso fra 1 e 100, abbiamo una possibilità su quattro di pescare un numero primo. Come cambia questa proporzione quando si considerano i numeri compresi fra 1 e 1.000 o fra 1 e 10.000? Armato delle sue tavole dei numeri primi, Gauss cominciò la ricerca. Osservando la frazione di numeri primi compresi in intervalli sempre più grandi, scoprì che cominciava a emergere una struttura. A dispetto della casualità di quei numeri, sembrava che nella nebbia si profilasse una stupefacente regolarità.

Se osserviamo la tabella di valori dei numeri primi compresi fra 1 e varie potenze di dieci riportata qui sotto, una tabella basata su metodi di calcolo più moderni, questa regolarità diventa evidente.

N	Numero di primi compresi fra 1 e N, che spesso si indica con $\pi(N)$	Distanza media fra due numeri primi successivi
10	4	2,5
100	25	4,0
1.000	168	6,0
10.000	1.229	8,1
100.000	9.592	10,4
1.000.000	78.498	12,7
10.000.000	664.579	15,0
100.000.000	5.761.455	17,4
1.000.000.000	50.847.534	19,7
10.000.000.000	455.052.511	22,0

La tabella, che contiene molte più informazioni di quelle di cui disponeva Gauss, ci mostra in modo chiaro la regolarità da lui scoperta. Ed è nell'ultima colonna che tale regolarità si manifesta. Questa colonna riporta la frazione di numeri primi rispetto a tutti i numeri considerati. Per esempio, quando si conta fino a 100, un numero su quattro è primo, così che in quest'intervallo dovremo aggiungere in media 4 per passare da un numero primo al successivo. Dei numeri minori di 10 milioni, 1 su 15 è primo. (Perciò, per fare un esempio, c'è una

probabilità su 15 che un numero telefonico di sette cifre sia primo.) Per N maggiore di 10.000, l'incremento dei valori di quest'ultima colonna è sempre pari a circa 2,3.

Perciò, ogni volta che Gauss moltiplicava N per 10, doveva aggiungere 2,3 al rapporto fra i numeri primi e N. Questo nesso fra moltiplicazione e addizione è precisamente la relazione racchiusa in un logaritmo. Gauss, con il suo libro di logaritmi, dovette imbattersi in questa connessione che lo guardava dritto in faccia.

La ragione per la quale la frazione di numeri primi aumentava di 2,3 invece che di 1 ogni volta che Gauss moltiplicava N per 10 è che i numeri primi prediligono i logaritmi basati sulle potenze di un numero diverso da 10. Quando inserite il numero 100 nella vostra calcolatrice e poi premete il tasto «log», il risultato che ottenete è 2, cioè la soluzione dell'equazione $10^x = 100$. Ma nulla vi vieta di scegliere un numero diverso da 10 da elevare alla potenza di x. È la nostra ossessione per le dieci dita a rendere il numero 10 così attraente. Il numero che si eleva alla x è chiamato la *base* del logaritmo. Possiamo calcolare il logaritmo di un numero in una base diversa da 10. Se, per esempio, vogliamo calcolare il logaritmo di 128 in base 2 invece che in base 10, dobbiamo risolvere un problema diverso: trovare un numero x tale per cui $2^x = 128$. Se sulla nostra calcolatrice ci fosse un tasto «log in base 2», potremmo premerlo e otterremmo 7 come risposta, dato che dobbiamo elevare 2 alla settima potenza per arrivare a 128: $2^7 = 128$.

Ciò che Gauss scoprì è che per contare i numeri primi si

possono usare i logaritmi in base *e*, un numero speciale uguale, fino alla dodicesima cifra decimale, a 2,718 281 828 459... (come π, questo numero ha un'espansione decimale infinita e sempre diversa). In matematica *e* si rivela importante quanto π, e fa la sua comparsa in ogni angolo del mondo matematico. È per questo che i logaritmi in base *e* sono chiamati logaritmi «naturali».

La tabella che Gauss aveva costruito all'età di quindici anni lo portò a formulare l'ipotesi seguente. Per i numeri compresi fra 1 e N, ogni $\log(N)$ numeri ce ne sarà grossomodo 1 che è primo (dove $\log(N)$ rappresenta il logaritmo di N in base *e*). Perciò egli poteva stimare che i numeri primi compresi fra 1 e N fossero all'incirca $N/\log(N)$. Gauss non affermava che questo gli desse come per magia una formula esatta per calcolare quanti numeri primi fossero compresi fra 1 e N; solo che sembrava fornire un'ottima stima approssimata.

In seguito Gauss avrebbe applicato una filosofia analoga per ritrovare Cerere scomparso. Il suo metodo astronomico produceva una buona previsione per una piccola regione di spazio da osservare, sulla base dei dati che erano stati registrati. Gauss aveva tenuto lo stesso atteggiamento analizzando i numeri primi. Per generazioni di matematici cercare di prevedere la posizione precisa di un numero primo rispetto a quello precedente e produrre formule che generassero numeri primi erano diventati un'ossessione. Evitando di fissarsi sul dettaglio insignificante di stabilire quali numeri fossero primi e quali no, Gauss aveva individuato una sorta di ordine. Se invece di chiedersi quali numeri fossero primi, si face-

va un passo in dietro e ci si poneva la questione più ampia di quanti fossero i numeri primi inferiori a un milione, sembrava che emergesse una forte regolarità.

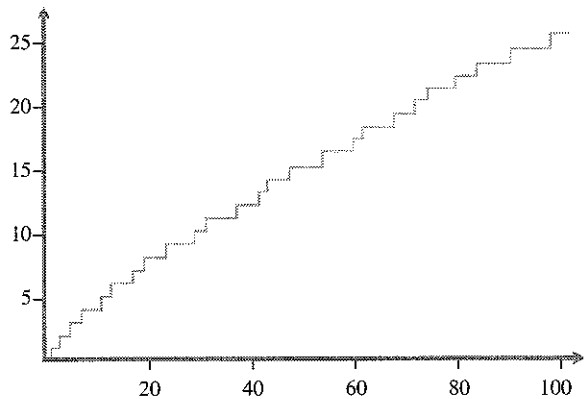
Gauss aveva introdotto un importante mutamento psicologico nell'osservazione dei numeri primi. Era come se le generazioni precedenti avessero ascoltato la musica dei numeri primi una nota alla volta, senza riuscire a sentire l'intera composizione. Concentrandosi invece sul numero di numeri primi che si incontrano man mano che si procede a contare, Gauss scoprì un modo nuovo per ascoltare il tema dominante.

Seguendo l'esempio di Gauss, è diventata consuetudine denotare il numero di numeri primi compresi fra 1 e N con il simbolo $\pi(N)$ (che non ha nulla a che vedere con il numero π). Gauss ebbe la sfortuna di adottare un simbolo che fa pensare alle circonferenze e al numero 3,1415... Pensatelo invece come un nuovo tasto della vostra calcolatrice. Inserite un numero N e premete il tasto $\pi(N)$, e la calcolatrice vi fornisce il numero di primi minori o uguali a N. Per esempio, $\pi(100) = 25$ è il numero di primi non maggiori di 100, e $\pi(1.000) = 168$.

Notate che potete usare questo nuovo tasto «conta-primi» anche per identificare con precisione la posizione di un numero primo. Se inserite il numero 100 e premete questo tasto per contare i numeri primi compresi fra 1 e 100, la risposta che ottenete è 25. Se ora inserite il numero 101, la risposta aumenterà di un'unità, diventando 26, e questo significa che 101 è un nuovo numero primo. Perciò, tutte le volte che

c'è una differenza fra $\pi(N)$ e $\pi(N+1)$, sappiamo che $N+1$ deve essere un nuovo numero primo.

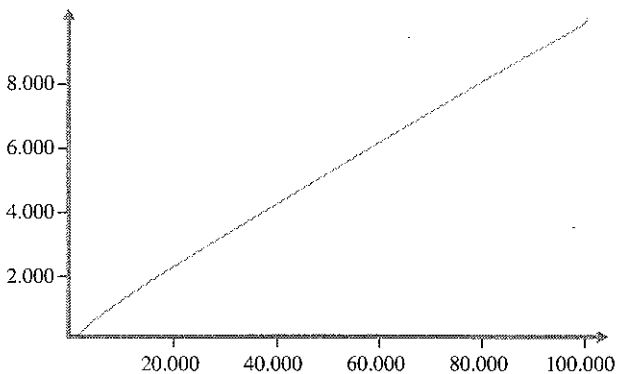
Per mettere in luce quanto fosse sbalorditivo l'andamento regolare scoperto da Gauss, possiamo osservare un grafico della funzione $\pi(N)$. Ecco come appare il grafico di $\pi(N)$ per valori di N che vanno da 1 a 100:



La scalinata dei numeri primi. Il grafico rappresenta il numero cumulativo di numeri primi che si incontrano contando da 1 a 100.

Su questo piccolo ordine di grandezza il risultato è una scalinata nervosa, in cui è difficile prevedere quanto si debba aspettare prima di incontrare il gradino successivo. In queste dimensioni riusciamo a vedere ancora i dettagli minuti dei numeri primi, le singole note.

Adesso facciamo un passo indietro e osserviamo il grafico della stessa funzione nel caso in cui N assuma valori compresi in un intervallo molto più ampio. Contiamo, per esempio, i numeri primi fino a 100.000 (vedi il grafico qui sotto).



La scalinata dei numeri primi
nell'intervallo che va da 1 a 100.000.

I singoli gradini diventano insignificanti e ci troviamo a osservare l'andamento complessivo di questa funzione: un pendio che sale lentamente e con regolarità. Era questo il grande tema che Gauss aveva sentito ed era in grado di riprodurre usando la funzione logaritmo.

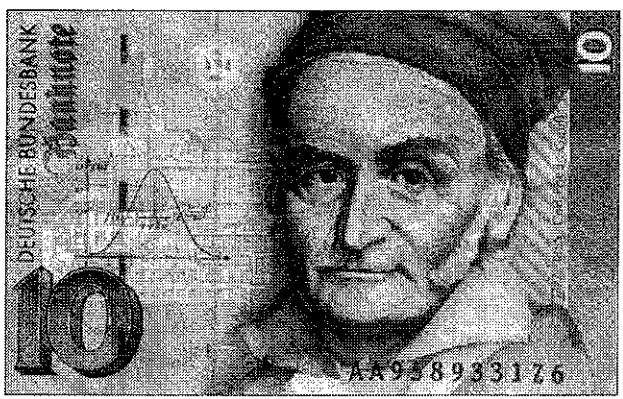
La rivelazione del fatto che il grafico salga in modo così regolare, a dispetto dell'estrema imprevedibilità dei numeri primi, è una delle più miracolose della matematica e rappresenta uno dei punti più alti nella storia dei numeri

primi. Sull'ultima pagina del suo libro di logaritmi, Gauss annotò la scoperta della sua formula per valutare il numero di numeri primi compresi fra 1 e N in termini della funzione logaritmo. Eppure, nonostante l'importanza della scoperta, Gauss non disse a nessuno quello che aveva trovato. Tutto ciò che il mondo seppe della rivelazione che egli aveva avuto furono le seguenti parole enigmatiche: «Non avete idea di quanta poesia ci sia in una tavola dei logaritmi».

Perché Gauss fu così reticente su qualcosa di tanto importante è un mistero. È vero che aveva individuato solo i primi indizi di una connessione fra numeri primi e funzione logaritmo. Sapeva di non possedere assolutamente alcuna spiegazione o dimostrazione della ragione per la quale queste due entità dovessero avere qualcosa in comune. Non c'era certezza che quell'andamento regolare non scomparisse all'improvviso quando si fossero presi in considerazione valori ancora più grandi di N. La riluttanza di Gauss ad annunciare risultati non dimostrati segnò un punto di svolta nella storia della matematica. Benché gli antichi greci avessero introdotto l'idea che la dimostrazione fosse un'importante componente del processo matematico, prima dell'epoca di Gauss i matematici erano molto più interessati all'aspetto speculativo della loro disciplina. Se la loro matematica funzionava, non si preoccupavano troppo di giustificare in maniera rigorosa perché funzionava. La matematica rimaneva lo strumento delle altre scienze.

Gauss ruppe col passato ponendo l'accento sul valore del-

la dimostrazione. Per lui, lo scopo primario della matematica era offrire dimostrazioni, una regola che è rimasta fondamentale fino a oggi. Senza una dimostrazione, per Gauss la scoperta del nesso fra logaritmi e numeri primi non aveva alcun valore. La libertà d'azione che gli concedeva il sostegno finanziario del duca di Brunswick significava la possibilità di essere molto selettivo, quasi indulgente con se stesso nei riguardi della matematica che produceva. La sua motivazione primaria non era la fama né il riconoscimento ma una comprensione personale della disciplina che amava. Il suo sigillo portava il motto *Pauca sed matura*. A meno che non avesse raggiunto la piena maturità, un risultato rimaneva un appunto nel suo diario o uno scarabocchio sul retro della sua tavola dei logaritmi.



La banconota da dieci marchi con cui la
Deutsche Bundesbank ha reso omaggio a Gauss.

Per Gauss, la matematica era una ricerca privata. Arrivò persino a celare gli appunti nel suo diario dietro un proprio linguaggio cifrato. Interpretare alcuni di questi appunti è facile. Per esempio, il 10 luglio 1796 Gauss scrisse la famosa esclamazione di Archimede «Eureka!» seguita dall'equazione

$$\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta$$

che rappresenta la sua scoperta del fatto che ogni numero può essere espresso come la somma di tre numeri triangolari – 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... – ovvero di quei numeri la cui formula Gauss aveva prodotto ai tempi della scuola. Per esempio, 50 = 1 + 21 + 28. Ma altri appunti rimangono un mistero assoluto. Nessuno è riuscito a capire che cosa si nasconda dietro a ciò che Gauss scrisse l'11 ottobre 1796: «Vicimus GEGAN». Alla mancata diffusione delle sue scoperte qualcuno ha attribuito la colpa di aver ritardato lo sviluppo della matematica di mezzo secolo. Se si fosse preso la briga di spiegare la metà di quello che aveva scoperto e non fosse stato così criptico nelle spiegazioni che fornì, forse la matematica avrebbe proceduto a un passo più spedito.

Alcuni ritengono che Gauss tenne per sé i propri risultati perché l'Accademia di Parigi aveva rigettato il suo grande trattato di teoria dei numeri, le *Disquisitiones arithmeticae*, giudicandolo oscuro e complesso. Scottato da quel rifiuto, per proteggersi da altre umiliazioni egli si risolse a non prendere nemmeno in considerazione l'idea di pubblicare qualcosa prima che tutti i pezzi del puzzle matematico fossero al loro posto. Se

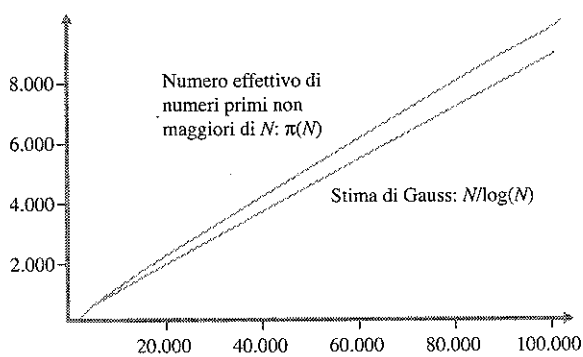
le *Diquisitiones arithmeticae* non ricevettero un plauso immediato, una delle ragioni fu che Gauss si mantenne criptico anche nelle opere a cui diede pubblica visibilità. Egli sostenne sempre che la matematica era come un'opera architettonica. Un architetto non lascia mai le impalcature perché la gente veda come è stato costruito un edificio. Questa filosofia non ha aiutato i matematici a comprendere la matematica di Gauss.

Ma c'erano altre ragioni per le quali Parigi fu meno ricettiva nei confronti delle idee di Gauss di quanto egli avesse sperato. Alla fine del XVIII secolo, a Parigi più che altrove la matematica era consacrata a soddisfare le richieste di uno Stato sempre più industrializzato. La Rivoluzione del 1789 aveva confermato a Napoleone la necessità di un insegnamento centralizzato dell'ingegneria militare. A quella necessità egli rispose fondando l'École Polytechnique, con lo scopo di favorire le proprie aspirazioni guerresche. «Il progresso e il perfezionamento della matematica sono intimamente connessi alla prosperità dello Stato» dichiarò Napoleone. Così la matematica francese fu consacrata alla soluzione di problemi di balistica e idraulica. Ma a dispetto dell'enfasi posta sulle necessità pratiche dello Stato, Parigi vantava ancora alcuni dei più eminenti matematici puri d'Europa.

Una delle grandi autorità parigine era Adrien-Marie Legendre, di venticinque anni più anziano di Gauss. I ritratti di Legendre mostrano il volto rotondo e paffuto di un gentiluomo dall'aria tronfia. Al contrario di Gauss, Legendre veniva da una famiglia ricca, ma avendo perduto il proprio patrimonio durante la Rivoluzione era stato costretto a fare af-

fidamento sulle proprie capacità matematiche per guadagnarsi da vivere. Anche lui si interessava di teoria dei numeri e nel 1798, con sei anni di ritardo sui calcoli compiuti dal giovanissimo Gauss, annunciò di aver scoperto un nesso sperimentale fra numeri primi e logaritmi.

In seguito sarebbe stato provato che Gauss aveva battuto Legendre sul tempo nella scoperta, ma Legendre perfezionò la stima del numero di primi compresi fra 1 e N. Gauss aveva ipotizzato che i numeri primi compresi fra 1 e N fossero grossomodo $N/\log(N)$. Benché la sua formula fornisse una buona approssimazione, si scoprì che si allontanava gradatamente dal dato reale man mano che il valore di N aumentava. Ecco un raffronto fra la stima fatta da Gauss in tenera età (la curva inferiore del diagramma seguente) e il vero numero di numeri primi (la curva superiore):



Un confronto fra la stima di Gauss e il numero effettivo di numeri primi.

Questo diagramma rivela che, sebbene Gauss avesse certamente scoperto qualcosa, c'era ancora spazio per un miglioramento.

All'approssimazione data da $N/\log(N)$ Legendre sostituì la formula

$$\frac{N}{\log(N) - 1{,}083\,66}$$

introducendo così una piccola correzione che aveva l'effetto di spostare verso l'alto la curva di Gauss, avvicinandola a quella della reale distribuzione dei numeri primi. Fino ai valori di queste funzioni che rientravano nelle capacità di calcolo dell'epoca, era impossibile distinguere il grafico di $\pi(N)$ da quello relativo alla stima di Legendre. Legendre, preso dall'assillo di trovare applicazioni pratiche della matematica, era molto meno riluttante a esporsi e ad azzardare qualche ipotesi sul nesso fra numeri primi e logaritmi. Non era un uomo che temeva di mettere in circolazione idee non dimostrate, e neanche dimostrazioni lacunose. Nel 1808 pubblicò la sua ipotesi sui numeri primi in un libro intitolato *Théorie des nombres*.

La controversia su chi fosse stato il primo a scoprire il nesso fra numeri primi e logaritmi portò a un'aspra disputa fra Legendre e Gauss. Lo scontro non si limitava alla questione dei numeri primi: Legendre sosteneva anche di essere stato lui a scoprire per primo il metodo di Gauss per determinare il moto di Cerere. Capitava spessissimo che all'asserzione di

Legendre di aver scoperto una nuova verità matematica Gauss ribattesse annunciando di aver già saccheggiato quel tesoro. In una lettera del 30 luglio 1806 scritta a un collega astronomo di nome Schumacher, Gauss commentava: «Sembra che io sia destinato a concorrere in quasi tutti i miei lavori teorici con Legendre».

Nel corso di tutta la sua vita Gauss fu troppo orgoglioso per farsi coinvolgere in guerre aperte sulla priorità delle proprie scoperte. Quando dopo la sua morte vennero esaminate le sue carte e la sua corrispondenza, divenne chiaro che il credito andava invariabilmente a lui. Fu solo nel 1849 che il mondo seppe che Gauss aveva battuto Legendre nella scoperta del nesso fra numeri primi e logaritmi, una scoperta che egli rivelò in una lettera scritta la vigilia di Natale di quell'anno al matematico e astronomo Johann Encke.

Considerando i dati disponibili all'inizio del XIX secolo, rispetto alla formula di Gauss la funzione di Legendre forniva un'approssimazione molto migliore del numero di numeri primi minori o uguali a *N*. Ma la presenza del brutto termine correttivo 1,083 66 induceva i matematici a ritenere che dovesse esistere un modo migliore, più naturale, per catturare il comportamento dei numeri primi.

Certo, brutti numeri di questo tipo sono probabilmente comunissimi in altre scienze, ma è straordinario quanto spesso il mondo matematico opti per la formulazione più elegante possibile. Come vedremo, l'ipotesi di Riemann può essere presa a esempio di una filosofia molto diffusa fra i matematici: di fronte all'alternativa fra un mondo brutto e uno

bello, la Natura sceglie sempre il secondo. Per la maggior parte dei matematici è costante fonte di meraviglia constatare che la matematica debba essere fatta così, e questo spiega perché la bellezza della loro disciplina li entusiasma tanto.

Perciò non sorprende che negli ultimi anni di vita Gauss perfezionò ulteriormente la sua stima del numero di primi, arrivando a una formula ancora più precisa, una formula che era anche molto più bella. In quella stessa lettera scritta a Encke alla vigilia di Natale, Gauss spiega come in seguito avesse trovato un modo per far meglio di Legendre: era ritornato alle sue primissime indagini sui numeri primi, quelle che aveva fatto da ragazzino. Aveva calcolato che un quarto dei numeri compresi fra 1 e 100 è primo. Quando però prendeva in considerazione i numeri compresi fra 1 e 1.000, la probabilità che uno di essi fosse primo scendeva a 1 su 6. Gauss comprese che quanto più si saliva nel conteggio tanto più diminuivano le probabilità che un numero fosse primo.

Così Gauss formò nella propria mente un'immagine del modo in cui la Natura poteva aver deciso quali numeri fossero destinati a essere primi e quali no. Considerato che la loro distribuzione appariva tanto casuale, lanciare una moneta non avrebbe potuto essere un buon modello per la scelta dei numeri primi? E se davvero la Natura avesse lanciato una moneta (testa un numero è primo, croce no)? Ora, fu il ragionamento di Gauss, era possibile variare il peso statistico dei lanci in modo che il risultato fosse testa non nella metà dei casi ma con una probabilità pari a $1/\log(N)$. Perciò la probabilità che il numero 1.000.000 sia primo do-

vrebbe essere interpretata come $1/\log(1.000.000)$, che è circa pari a $1/15$. Le possibilità che un numero N qualsiasi sia primo diminuiscono al crescere di N perché diminuisce il valore di $1/\log(N)$, ovvero la probabilità che l'esito del lancio sia testa.

Si tratta di una semplice speculazione, dato che 1.000.000, così come un qualsiasi altro numero, è primo oppure non lo è. Il lancio di una moneta non potrà mai modificare questo fatto. Anche se il suo modello concettuale non serviva a predire se un numero fosse primo, Gauss scoprì che era molto efficace per fare previsioni sulla questione meno specifica di quanti primi ci si può aspettare di trovare man mano che si procede a contare. Lo usò dunque per stimare il numero di numeri primi che si dovrebbe raggiungere dopo aver gettato la moneta dei numeri primi N volte. Con una normale moneta che ha il cinquanta per cento di probabilità di dare testa, il numero di volte in cui si ottiene testa dovrebbero essere pari a $\frac{1}{2}$. Ma con la moneta dei numeri primi la probabilità diminuisce a ogni lancio. Il modello di Gauss prevede che il numero di numeri primi minori o uguali a N sia

$$\frac{1}{\log(2)} + \frac{1}{\log(3)} + \ldots + \frac{1}{\log(N)}$$

In realtà Gauss fece un passo ulteriore per creare una funzione che chiamò logaritmo integrale e che si indica con $\mathrm{Li}(N)$. La formulazione di questa nuova funzione era basata

su una leggera variazione della precedente somma di probabilità e si rivelò incredibilmente precisa.

Quando Gauss, ormai ultrasettantenne, scrisse a Encke, aveva costruito tavole dei numeri primi che arrivavano fino a 3.000.000. «Molto spesso utilizzavo un quarto d'ora di inattività per passare in rassegna un'altra chiliade [un intervallo di mille numeri] qua e là» alla ricerca di numeri primi. La stima dei numeri primi inferiori a 3.000.000 che egli fece adoperando il suo logaritmo integrale Li(N) si discostava per appena un settecentesimo dell'un per cento dalla realtà. Legendre era riuscito a manipolare la sua brutta formula in modo che uguagliasse $\pi(N)$ per valori relativamente piccoli di N; perciò, con i dati disponibili all'epoca, sembrava che la sua formula fosse più accurata. Quando si cominciarono a compilare tavole più estese, si scoprì che la stima di Legendre diventava molto meno precisa per i numeri primi maggiori di 10.000.000. Un professore dell'università di Praga, Jakub Kulik, dedicò vent'anni della propria vita esclusivamente alla compilazione di tavole dei numeri primi che arrivavano fino a 100.000.000. Gli otto volumi di quest'opera immane, completata nel 1863, non furono mai pubblicati, ma rimasero custoditi negli archivi dell'Accademia delle scienze di Vienna. Benché il secondo volume sia andato perduto, quelle tavole erano già sufficienti a rivelare che il metodo di Gauss, basato sulla funzione Li(N), si dimostrava ancora una volta superiore a quello di Legendre. Le tavole moderne mostrano quanto fosse migliore l'intuizione di Gauss. Per esempio, la sua stima del numero di primi minori

di 10^{16} (ovvero di 10.000.000.000.000.000) si discosta dal valore corretto per appena un decimilionesimo dell'un per cento, mentre nella stima di Legendre l'errore era pari a un decimo dell'un per cento. L'analisi teorica di Gauss aveva trionfato sui tentativi di Legendre di manipolare la sua formula perché si accordasse con i dati disponibili.

Gauss notò una caratteristica curiosa nel proprio metodo. In base a ciò che sapeva dei numeri primi minori di 3.000.000, poteva vedere che la funzione $\mathrm{Li}(N)$ sembrava fornire costantemente una stima per eccesso del numero di numeri primi. Suppose allora che fosse sempre così. E chi non scommetterebbe sull'intuizione di Gauss ora che le verifiche numeriche moderne la confermano fino a 10^{16}? Senza dubbio un qualsiasi esperimento che producesse lo stesso risultato per 10^{16} volte sarebbe considerato assai convincente in quasi tutti i laboratori; non in quello di un matematico, però. Una volta tanto, una delle ipotesi intuitive di Gauss si è rivelata sbagliata. Ma anche se oggi i matematici hanno dimostrato che prima o poi $\pi(N)$ deve assumere valori maggiori di $\mathrm{Li}(N)$, nessuno l'ha mai visto accadere, dato che non siamo ancora in grado di spingerci abbastanza in là nei calcoli.

Un raffronto fra i grafici di $\pi(N)$ e di $\mathrm{Li}(N)$ evidenzia una tale concordanza che è quasi impossibile distinguerli quando se ne osserva un ampio tratto. Devo però sottolineare che se si osserva con una lente di ingrandimento una qualsiasi porzione di quest'immagine, la differenza fra le due funzioni appare evidente. Il grafico di $\pi(N)$ ha l'aspetto di una scalina-

ta, mentre quello di Li(N) è una curva di andamento regolare, priva di salti bruschi.

Gauss aveva portato alla luce le prove dell'esistenza della moneta che la Natura aveva lanciato per scegliere i numeri primi. Questa moneta era fatta in modo tale per cui un numero N aveva una probabilità pari a 1 su log(N) di essere primo. Ma a Gauss mancava ancora un metodo per predire l'esito preciso dei lanci. Per scoprirlo sarebbero state necessarie le capacità di penetrazione di una nuova generazione di matematici.

Cambiando la propria prospettiva, Gauss aveva percepito un ordine nei primi. La sua ipotesi divenne nota con il nome di «congettura di Gauss sui numeri primi». Per rivendicare il trofeo di Gauss, i matematici dovevano dimostrare che l'errore percentuale che divide il logaritmo integrale dal vero numero di numeri primi si riduce sempre più man mano che si procede a contare. Gauss aveva visto quella vetta remota, ma alle generazioni future rimaneva il compito di fornire una dimostrazione, di rivelare il percorso per raggiungerla, oppure di smascherare il carattere illusorio del nesso.

Molti attribuiscono alla comparsa di Cerere la responsabilità di aver distolto Gauss dal tentativo di dimostrare in prima persona la sua congettura sui numeri primi. La fama immediata che ottenne a soli ventiquattro anni lo sospinse verso l'astronomia. Nel 1806, quando il suo mecenate, il duca Ferdinando, fu ucciso da Napoleone, Gauss fu costretto a trovare un altro impiego per mantenere la propria famiglia. Nonostante le proposte dell'Accademia di Pietroburgo, che

era alla ricerca di un successore di Eulero, decise di accettare il posto di direttore all'osservatorio di Gottinga, una cittadina universitaria della Bassa Sassonia. Passò il tempo a seguire le tracce di altri asteroidi nel cielo notturno e a completare dei rilevamenti topografici per il governo hannoveriano e per quello danese. Ma non smise mai di pensare alla matematica. Mentre tracciava le mappe delle montagne dell'Hannover meditava sull'assioma euclideo delle rette parallele, e una volta tornato all'osservatorio continuava ad ampliare le sue tavole dei numeri primi. Gauss aveva colto il primo grande tema nella musica dei numeri primi. Ma sarebbe stato uno dei suoi pochi studenti, Riemann, a liberare veramente tutta la potenza delle armonie che si nascondevano sotto la cacofonia dei numeri primi.

3

Lo specchio matematico immaginario di Riemann

Non lo sentite, non lo vedete? Odo io soltanto questa melodia che così maravigliosa e sommessa...

Richard Wagner, *Tristano ed Isolda*
(Atto III, Scena iii)

Nel 1809 Wilhelm von Humboldt divenne ministro dell'Istruzione dello Stato prussiano, nella Germania settentrionale. In una lettera a Goethe del 1816, scriveva: «Qui mi sono occupato molto di scienza, ma ho sentito profondamente il potere che l'antichità ha sempre esercitato su di me. Il nuovo mi disgusta...». Humboldt promosse un allontanamento dalla scienza come mezzo volto a raggiungere scopi pratici e un ritorno alla tradizione più classica di un perseguimento della conoscenza fine a se stessa. I precedenti programmi scolastici erano stati orientati a produrre funzionari pubblici per la maggior gloria della Prussia. D'ora in poi, si sarebbe posta più enfasi su un'istruzione al servizio dei bisogni dell'individuo piuttosto che dello Stato.

Nella sua veste di pensatore e di uomo di Stato, Humboldt mise in atto una rivoluzione che avrebbe avuto effetti di vasta portata. In tutta la Prussia e nello Stato confinante dell'Hannover furono create nuove scuole, i ginnasi. Col tempo gli insegnanti di queste scuole non sarebbero più stati membri del clero, come accadeva nel vecchio sistema educativo, ma laureati delle nuove università e dei nuovi politecnici che stavano sorgendo in quel periodo.

Il gioiello più prezioso era l'università di Berlino, fondata nel 1810 durante l'occupazione francese. Humboldt la definiva «la madre di tutte le università moderne». Ospitata in quello che un tempo era stato il palazzo del principe Enrico di Prussia sul grandioso viale alberato Unter den Linden, l'università avrebbe promosso per la prima volta la ricerca accanto all'insegnamento. «L'insegnamento universitario non rende possibile soltanto una comprensione dell'unità della scienza ma anche il suo avanzamento» dichiarò Humboldt. A dispetto della sua passione per il mondo antico, sotto la sua guida l'università si aprì all'introduzione di nuove discipline al fianco delle classiche facoltà di legge, medicina, filosofia e teologia.

Per la prima volta, lo studio della matematica avrebbe costituito una parte importante del curriculum nei nuovi ginnasi e nelle nuove università. Gli studenti erano incoraggiati a studiare la matematica in quanto tale, e non semplicemente come una disciplina al servizio delle altre scienze. Ciò era in totale contrasto con le riforme dell'istruzione introdotte da Napoleone, che videro lo sfruttamento della matematica

per espandere le mire militari francesi. Nel 1830 Carl Jacobi, uno dei professori di Berlino, scrisse a Legendre a Parigi riguardo al matematico francese Joseph Fourier, il quale aveva rimproverato alla scuola di pensiero tedesca di ignorare problemi più pratici:

> È vero che Fourier era dell'opinione che lo scopo principale della matematica è l'utilità pubblica e la spiegazione dei fenomeni naturali; ma un filosofo come lui avrebbe dovuto sapere che il solo scopo della scienza è l'onore dello spirito umano, e che da questo punto di vista un problema di teoria dei numeri è degno quanto un problema sul sistema del mondo.

Per Napoleone, sarebbe stata l'istruzione a demolire finalmente le regole arcane dell'*ancien régime*. Il suo riconoscimento del fatto che l'istruzione era la spina dorsale su cui costruire la nuova Francia aveva portato alla creazione di alcuni degli istituti parigini che rimangono famosi ancora oggi. Non solo quei collegi erano meritocratici, così che li potevano frequentare studenti di ogni ambiente sociale, ma la loro filosofia didattica poneva una grande enfasi su un'istruzione e una scienza al servizio della società. Nel 1794, uno dei rappresentanti regionali del governo rivoluzionario scrisse a un professore di matematica per raccomandargli di tenere un corso di «aritmetica rivoluzionaria»: «Cittadino. La Rivoluzione non soltanto migliora i nostri principi morali e spiana il cammino per la nostra felicità e per quella delle generazio-

ni future, essa scioglie anche le catene che frenano il progresso scientifico».

L'atteggiamento di Humboldt nei confronti della matematica era molto diverso dalla filosofia utilitaristica che prevaleva oltre frontiera. Gli effetti emancipatori della rivoluzione didattica in Germania erano destinati ad avere un grande impatto sulla comprensione da parte dei matematici di molti aspetti del loro campo. Avrebbero permesso loro di creare un linguaggio matematico nuovo, più astratto. In particolare, avrebbero rivoluzionato lo studio dei numeri primi.

Una città che beneficiò delle iniziative di Humboldt fu Lüneberg, nell'Hannover. Lüneberg, un tempo fiorente centro commerciale, era in declino. Le sue anguste vie pavimentate a ciottoli non ronzavano più dell'attività di cui erano state testimoni nei secoli precedenti. Ma nel 1829 un nuovo edificio fu eretto fra gli alti campanili delle tre chiese gotiche di Lüneberg: il Gymnasium Johanneum.

Poco più di dieci anni dopo, all'inizio degli anni Quaranta, la nuova scuola prosperava. Il suo direttore, Schmalfuss, era un sostenitore entusiasta degli ideali umanistici promossi da Humboldt. La sua biblioteca rispecchiava le sue idee illuminate: non solo vi comparivano i classici e le opere degli scrittori tedeschi moderni, ma anche volumi provenienti da luoghi lontani. In particolare, Schmalfuss riuscì a mettere le mani su alcuni libri provenienti da Parigi, il motore dell'attività intellettuale europea nella prima metà del secolo.

Schmalfuss aveva appena ammesso un nuovo allievo al Gymnasium Johanneum, Bernhard Riemann. Riemann era

un ragazzo molto timido che incontrava difficoltà a farsi degli amici. Aveva frequentato il ginnasio nella città di Hannover, dove era ospite della nonna, ma quando lei era morta, nel 1842, era stato costretto a trasferirsi a Lüneberg dove aveva la possibilità di stare a pensione presso uno dei suoi insegnanti. Il fatto di cominciare a frequentare la nuova scuola quando tutti i suoi coetanei avevano ormai stretto amicizia fra loro non rese facile la vita a Riemann. Aveva una disperata nostalgia di casa e gli altri ragazzini lo prendevano in giro. Avrebbe preferito tornare a piedi fino alla lontana casa di suo padre a Quickborn piuttosto che rimanere a giocare con i suoi coetanei.

Il padre di Riemann, pastore di Quickborn, si aspettava molto da suo figlio. Così, nonostante a scuola fosse infelice, Bernhard si impegnava a fondo e studiava coscienziosamente, determinato a non deludere suo padre. Ma doveva lottare con una vena di perfezionismo quasi paralizzante. Spesso la sua incapacità di consegnare i compiti scoraggiava i professori. A meno che non fossero perfetti, il ragazzo non poteva sopportare di subire l'onta di ricevere un voto meno che massimo. I suoi professori cominciarono a dubitare che Riemann sarebbe mai riuscito a superare gli esami finali.

Fu Schmalfuss a individuare un modo per far crescere quel ragazzino e far fruttare la sua ossessione per la perfezione. Schmalfuss aveva notato subito le straordinarie capacità matematiche di Riemann ed era ansioso di stimolarne le qualità di studente. Diede a Riemann libero accesso alla sua biblioteca, con l'eccellente collezione di libri di matematica

che conteneva. Lì il ragazzo avrebbe potuto sfuggire alle pressioni sociali dei compagni di classe. La biblioteca aprì a Riemann un mondo nuovo, un luogo in cui si sentiva a casa propria, padrone della situazione. All'improvviso si ritrovava in un mondo matematico perfetto, idealizzato, un nuovo mondo a cui le dimostrazioni impedivano di crollare e dove i numeri diventavano suoi amici.

L'impulso impresso da Humboldt alla didattica, dall'insegnamento della scienza come strumento pratico alla nozione più estetica di una conoscenza fine a se stessa, era penetrato nelle aule scolastiche di Schmalfuss. Egli allontanò Riemann dalla lettura di testi matematici pieni di formule e regole che avevano lo scopo di soddisfare le richieste di un mondo industriale in espansione e lo indirizzò verso i classici di Euclide, Archimede e Apollonio. Con la loro geometria, gli antichi greci cercavano di comprendere una struttura astratta fatta di punti e linee; non erano ossessionati dalle formule che si celavano dietro i concetti geometrici. Quando Schmalfuss si decise a far leggere a Riemann il trattato di geometria analitica di Cartesio, un testo più moderno che traboccava di equazioni e formule, si rese conto che il metodo sviluppato nel libro non faceva presa sul gradimento crescente di Riemann per una matematica concettuale. «Già a quel tempo egli era un matematico in possesso di mezzi accanto ai quali un insegnante si sentiva povero» ricordò in seguito Schmalfuss in una lettera a un amico.

Uno dei libri che si trovavano sugli scaffali della biblioteca di Schmalfuss era un volume di matematica contemporanea

che l'insegnante aveva acquistato dalla Francia. Pubblicata nel 1808, la *Théorie des nombres* di Adrien-Marie Legendre era il primo testo in cui si riportava l'osservazione secondo cui sembrava esserci uno strano nesso fra la funzione che forniva il numero di numeri primi in un dato intervallo e la funzione logaritmo. Quel nesso, scoperto da Gauss e da Legendre, si basava soltanto su indizi sperimentali. Era tutt'altro che chiaro se, qualora si fosse proceduto a contare, la funzione di Gauss o quella di Legendre avrebbe continuato a fornire un valore approssimato del numero dei primi.

A dispetto delle 859 pagine di grande formato del volume, Riemann lo divorò e lo restituì al suo professore dopo appena sei giorni dichiarando: «Questo è un libro meraviglioso; lo so a memoria». Schmalfuss non poteva crederci, ma quando due anni dopo, nel corso degli esami finali, interrogò Riemann sui contenuti del libro, lo studente rispose in maniera impeccabile. Quell'episodio segnò l'inizio della carriera di uno dei giganti della matematica moderna. Grazie a Legendre, nella mente del giovane Riemann era stato piantato un seme che anni dopo avrebbe dato frutti spettacolari.

Superati gli esami finali, Riemann era ansioso di iscriversi a una delle nuove università che con grande energia stavano guidando la rivoluzione didattica in Germania. Suo padre, però, aveva altre idee. La famiglia di Riemann era povera e suo padre sperava che Bernhard seguisse le sue orme entrando a far parte della Chiesa. Una vita da ecclesiastico gli avrebbe fornito un reddito regolare con cui provvedere alle sue sorelle. La sola università del regno d'Hannover in cui si

insegnava teologia non era una di quelle nuove istituzioni ma l'università di Gottinga, fondata oltre un secolo prima, nel 1734. Perciò nel 1846, per ottemperare ai desideri di suo padre, Riemann prese la strada dell'umida città di Gottinga.

Bernhard Riemann (1826-1866).

Gottinga giace placida fra le dolci colline della Bassa Sassonia. Il suo cuore è una cittadina medievale circondata da antichi bastioni. È questa la Gottinga che Riemann avrebbe conosciuto e che conserva ancora molto del suo carattere originale. Le vie serpeggiano strette fra case in legno e muratura coperte di tetti di tegole rosse. I fratelli Grimm scrissero a Gottinga molte delle loro fiabe, e si possono immaginare

Hansel e Gretel che corrono per le sue strade. Al centro si eleva il medievale palazzo del comune, sulle cui mura campeggia il motto «Lontano da Gottinga non c'è vita». Per chi stava all'università, la sensazione era certamente questa. La vita accademica era una vita di autosufficienza. Benché la teologia avesse dominato nei primi anni dell'università, i venti del cambiamento accademico che soffiavano in Germania avevano stimolato gli studi scientifici anche a Gottinga. Quando Gauss era stato nominato professore d'astronomia e direttore dell'osservatorio cittadino, nel 1807, era per la scienza più che per la teologia che Gottinga stava diventando famosa.

Il fuoco matematico che il professor Schmalfuss aveva acceso nel giovane Riemann ardeva ancora con vigore. Il desiderio di suo padre che egli studiasse teologia l'aveva condotto a Gottinga, ma fu l'influenza del grande Gauss e della tradizione scientifica della città a segnarlo durante quel primo anno. Era solo una questione di tempo prima che le lezioni di greco e di latino lasciassero posto alla tentazione dei corsi di fisica e matematica. Con trepidazione, Riemann scrisse a suo padre lasciandogli intendere che gli sarebbe piaciuto passare da teologia a matematica. L'approvazione paterna significava tutto per Riemann. Ricevette la sua benedizione con sollievo e si immerse immediatamente nella vita scientifica dell'università.

A un giovane dotato del suo talento Gottinga cominciò presto a sembrare piccola. In un anno Riemann aveva esaurito le risorse a sua disposizione. Gauss, ormai anziano, si

era alquanto appartato dalla vita intellettuale dell'università: dopo il 1828 aveva passato una sola notte lontano dall'osservatorio, dove viveva. All'università si limitava a tenere lezioni d'astronomia, in particolare sul metodo che lo aveva reso famoso molti anni prima, quando aveva riscoperto Cerere, il pianeta «perduto». Riemann doveva cercare altrove gli stimoli di cui aveva bisogno per compiere il passo successivo nel proprio sviluppo. Si rendeva conto che Berlino era il luogo da cui si alzava più alto il brusio dell'attività intellettuale.

I prestigiosi istituti di ricerca francesi voluti da Napoleone, come per esempio l'École Polytechnique, avevano avuto una notevole influenza sull'università di Berlino che, dopo tutto, era stata fondata durante l'occupazione francese. Uno degli ambasciatori che ebbero un ruolo chiave in questo senso fu un brillante matematico di nome Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Dirichlet era nato in Germania nel 1805, ma la sua famiglia era francese d'origine. Nel 1822 un ritorno alle radici lo condusse a Parigi, dove trascorse cinque anni impregnandosi di quell'attività intellettuale che fuoriusciva ribollendo dalle accademie. Alexander von Humboldt, fratello di Wilhelm e scienziato dilettante, incontrò Dirichlet durante i suoi viaggi e ne rimase così impressionato che gli procurò un impiego in Germania. Dirichlet aveva uno spirito piuttosto ribelle. Forse l'atmosfera delle strade di Parigi gli aveva dato il gusto di sfidare le autorità. A Berlino era ben felice di ignorare alcune delle tradizioni antiquate imposte dalle autorità universitarie, assai retrograde, e spesso trasgre-

diva intenzionalmente le loro richieste per dimostrare la propria padronanza della lingua latina.

Gottinga e Berlino offrivano agli scienziati emergenti come Riemann climi accademici contrastanti. Gottinga si beava della propria indipendenza e del proprio isolamento. Pochi erano i seminari tenuti da persone che venivano da fuori le mura cittadine. L'università era autosufficiente e produceva grande scienza con il combustibile che bruciava al suo interno. Berlino, al contrario, prosperava grazie agli stimoli che riceveva da oltre confine. Le idee introdotte dalla Francia si mescolavano con l'innovativo approccio tedesco alla filosofia naturale per creare un nuovo, inebriante cocktail.

I climi diversi di Gottinga e Berlino si addicevano a matematici diversi. Alcuni non avrebbero mai fatto strada se non fossero entrati in contatto con idee nuove provenienti dall'esterno. Il successo di altri matematici si può far risalire a un isolamento che li costringeva a trovare una forza interiore e con essa nuovi linguaggi e modi di pensare. Quanto a Riemann, le sue conquiste matematiche si sarebbero rivelate il frutto del contatto con l'abbondanza di nuove idee che erano nell'aria, ed egli si rendeva conto che Berlino era il posto giusto dove stare.

Riemann si trasferì a Berlino nel 1847 e vi rimase per due anni. Mentre era lì, riuscì a mettere le mani su quegli scritti di Gauss che non era stato in grado di ottenere direttamente dal riservato maestro a Gottinga. Assistette alle lezioni di Dirichlet, il quale in seguito avrebbe recitato una parte nelle

sensazionali scoperte di Riemann sui numeri primi. A detta di tutti, Dirichlet era un docente capace di ispirare chi lo ascoltava. Un matematico che assistette alle sue lezioni si espresse così in proposito:

> Dirichlet è insuperabile quanto a ricchezza di materiale e a chiarezza di penetrazione [...] Siede all'alta scrivania di fronte a noi, solleva gli occhiali sulla fronte, poggia la testa su entrambe le mani e [...] dentro le sue mani vede un calcolo immaginario che ci legge ad alta voce; quel calcolo lo comprendiamo come se lo vedessimo anche noi. Mi piace questo modo di fare lezione.

Ai seminari di Dirichlet, Riemann strinse amicizia con vari giovani ricercatori che come lui erano accesi di passione per la matematica.

Ma c'erano anche altre forze che si agitavano a Berlino. Dalle strade di Parigi, la rivoluzione del 1848 che spazzò via la monarchia francese si diffuse in gran parte d'Europa. Raggiunse le strade di Berlino quando Riemann vi studiava. Stando ai resoconti dei suoi contemporanei, quegli eventi ebbero un profondo impatto su di lui. In una delle poche occasioni della vita nelle quali si unì a coloro che gli stavano attorno in qualche cosa che esulasse da un piano puramente intellettuale, Riemann si arruolò nel reparto di studenti che difesero il re nel suo palazzo a Berlino. Si dice che rimase al proprio posto sulle barricate per sedici ore consecutive.

La risposta di Riemann alla rivoluzione matematica che si diffondeva da Parigi non fu però quella di un reazionario. Da Parigi Berlino non importava solo la propaganda politica, ma anche molte riviste e pubblicazioni che uscivano dalle accademie. Riemann ricevette i volumi più recenti dell'influente rivista francese «Comptes rendus» e si rintanò nella sua stanza per studiare gli articoli del matematico rivoluzionario Augustin-Louis Cauchy.

Cauchy, nato poche settimane dopo la presa della Bastiglia, era un figlio della Rivoluzione. Malnutrito a causa della carenza di cibo di quegli anni, da ragazzo il gracile Cauchy preferì esercitare la mente invece del corpo. Secondo una consuetudine consacrata dal tempo, il mondo della matematica gli fornì un rifugio. Un matematico amico di suo padre, Lagrange, riconobbe il talento precoce del ragazzo. A un suo contemporaneo disse: «Vedete quel giovanotto minuto? Bene! Come matematico ci soppianterà tutti». Ma aveva un consiglio interessante per il padre di Cauchy. «Fate che non tocchi un libro di matematica finché non compirà diciassette anni.» Suggerì invece di stimolare le capacità letterarie del ragazzo così che quando fosse tornato alla matematica sarebbe stato in grado di esprimersi per iscritto con la propria voce e non con una acquistata dai libri dell'epoca.

Si dimostrò un consiglio azzeccato. Cauchy sviluppò una voce nuova che fu impossibile frenare una volta che le cateratte che lo proteggevano dal mondo esterno si riaprirono. La produzione di Cauchy crebbe fino a diventare così im-

mensa che la rivista «Comptes rendus» dovette imporre un limite di pagine per gli articoli da pubblicare, un limite a cui ci si attiene strettamente ancora oggi. Il nuovo linguaggio matematico di Cauchy era troppo difficile per alcuni dei suoi contemporanei. Nel 1826 il matematico norvegese Niels Henrik Abel scrisse: «Cauchy è folle [...] Ciò che fa è eccellente ma molto confuso. All'inizio non ne capivo praticamente nulla; ora riesco a discernerne una parte con maggior chiarezza». Abel continuava osservando che di tutti i matematici di Parigi Cauchy era il solo a fare «matematica pura» mentre gli altri «si occupavano esclusivamente di magnetismo e di altri argomenti fisici [...] Lui è il solo che sa come si dovrebbe fare matematica».

Cauchy si sarebbe cacciato nei guai con le autorità parigine per aver allontanato gli studenti dalle applicazioni pratiche della matematica. Il direttore dell'École Polytechnique, dove Cauchy insegnava, gli scrisse criticando la sua ossessione per la matematica astratta: «È opinione di molte persone che si stia decisamente esagerando con l'insegnamento della matematica pura all'École e che una tale immotivata stravaganza sia dannosa per le altre discipline». Non c'era dunque da meravigliarsi se l'opera di Cauchy sarebbe stata apprezzata dal giovane Riemann.

Quelle nuove idee erano così eccitanti che Riemann divenne quasi un recluso. Nel periodo in cui fu impegnato nello studio della produzione matematica di Cauchy, dovette sparire completamente dalla vista dei suoi contemporanei. Riapparve parecchie settimane dopo, dichiarando che «que-

sta è una matematica nuova». Ciò che aveva catturato l'immaginazione di Cauchy e di Riemann era il potere emergente dei numeri immaginari.

Numeri immaginari, una nuova prospettiva matematica

La radice quadrata di meno uno, l'elemento di base dei numeri immaginari, appare una contraddizione in termini. Secondo qualcuno, il fatto di ammettere la possibilità che esista un tale numero è ciò che separa i matematici da tutti gli altri. Ci vuole un salto di creatività per guadagnarsi l'accesso a questo pezzetto del mondo matematico. A prima vista si ha l'impressione che non abbia nulla a che fare con il mondo fisico. Il mondo fisico sembra essere costruito su numeri il cui quadrato è sempre un numero positivo. I numeri immaginari, tuttavia, sono più di un semplice gioco astratto. Essi custodiscono la chiave che dà accesso al mondo delle particelle subatomiche del XX secolo. Su una scala più grande, gli aeroplani non avrebbero mai preso la via dei cieli se gli ingegneri non avessero intrapreso un viaggio nel mondo dei numeri immaginari. Questo nuovo mondo offre una flessibilità negata a coloro che rimangono legati ai numeri ordinari.

La storia di come furono scoperti questi nuovi numeri inizia con la necessità di risolvere semplici equazioni. Come già riconobbero i babilonesi e gli egizi, se si dovevano

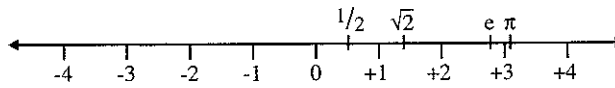
dividere sette pesci fra tre persone, per fare un esempio, nell'equazione sarebbero intervenuti dei numeri frazionari: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ eccetera. Nel VI secolo a.C. i greci scoprirono studiando la geometria dei triangoli che a volte queste frazioni non erano in grado di esprimere le lunghezze dei lati di un triangolo. Il teorema di Pitagora li costrinse a inventare nuovi numeri che non potevano essere scritti come semplici frazioni. Per esempio, Pitagora poteva prendere un triangolo rettangolo con i due cateti di lunghezza unitaria. Il suo famoso teorema gli diceva allora che l'ipotenusa aveva una lunghezza x, dove x è una soluzione dell'equazione $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. In altre parole, la lunghezza dell'ipotenusa era uguale alla radice quadrata di 2.

Le frazioni sono i numeri la cui espansione decimale ha un andamento che si ripete. Per esempio, $\frac{1}{7}$ = 0,142 857 142 857... oppure $\frac{1}{4}$ = 0,250 000 000... Al contrario, i greci erano in grado di dimostrare che la radice quadrata di 2 non è uguale a una frazione. Per quanto procediate nel calcolo dell'espansione decimale della radice quadrata di 2, essa non si stabilizzerà mai in un andamento ripetitivo di questo tipo. La radice quadrata di 2 comincia con 1,414 213 562... Negli anni trascorsi a Gottinga Riemann era solito riempire le ore libere calcolando un numero sempre maggiore di questi decimali. Il suo record fu di trentotto cifre decimali, un'impresa sicuramente non da poco senza un calcolatore ma forse più un indice di quanto fosse noiosa la vita notturna a Gottinga e schiva la personalità di Riemann, considerato che era questo il suo svago serale. Tuttavia Riemann

sapeva che per quanto procedesse nei calcoli non avrebbe mai potuto scrivere il numero completo o scoprire un andamento ripetitivo.

Per descrivere l'impossibilità di esprimere quei numeri se non come soluzioni di equazioni quali $x^2 = 2$, i matematici li battezzarono *numeri irrazionali*. Il nome rifletteva il senso di disagio dei matematici di fronte alla propria incapacità di scriverli per esteso in modo esatto. Nondimeno, i numeri irrazionali conservavano un significato reale, dato che li si poteva *vedere* come punti segnati su un regolo, o su quella che i matematici chiamano la retta numerica. La radice quadrata di 2, per esempio, è un punto che si trova da qualche parte fra 1,4 e 1,5. Se si potesse realizzare un perfetto triangolo rettangolo pitagorico con i due cateti lunghi un'unità, allora sarebbe possibile determinare l'esatta posizione di questo numero irrazionale appoggiando l'ipotenusa del triangolo sul regolo e facendo un segno in corrispondenza della sua lunghezza.

I numeri negativi vennero scoperti in modo simile tentando di risolvere semplici equazioni come $x + 3 = 1$. I matematici indiani proposero questi nuovi numeri nel VII secolo d.C. I numeri negativi furono creati per rispondere alle esigenze di un mondo finanziario in espansione, poiché erano utili per rappresentare i debiti. Dovette passare un altro millennio prima che i matematici d'Europa si decidessero ad ammettere l'esistenza di questi «numeri fittizi», com'erano chiamati. I numeri negativi presero il loro posto su una retta numerica che si estendeva a sinistra dello zero.



I numeri reali. Ogni numero frazionario, negativo o irrazionale è rappresentato da un punto sulla retta numerica.

I numeri irrazionali e i numeri negativi ci permettono di risolvere molte equazioni diverse. L'equazione di Fermat $x^3 + y^3 = z^3$ ha delle soluzioni interessanti se non ci si ostina a pretendere, come aveva fatto Fermat, che x, y e z debbano essere numeri interi. Per esempio possiamo scegliere $x = 1$ e $y = 1$, porre z uguale alla radice cubica di 2, e l'equazione è risolta. Tuttavia rimanevano altre equazioni che non si potevano risolvere ricorrendo ai numeri della retta numerica.

Sembrava che nessuno dei numeri esistenti fornisse una soluzione per l'equazione $x^2 = -1$. Dopo tutto, se elevate al quadrato un numero, positivo o negativo che sia, il risultato è sempre positivo. Perciò un numero che soddisfi questa equazione non potrà essere un numero ordinario. Ma se i greci avevano potuto immaginare un numero quale la radice quadrata di 2, pur non essendo in grado di scriverlo nella forma di una frazione, i matematici cominciarono a capire che potevano fare un analogo balzo d'immaginazione e creare un nuovo numero per risolvere l'equazione $x^2 = -1$. Un tale salto creativo segna una delle sfide concettuali che chiunque studi matematica deve affrontare. Il nuovo nume-

ro, la radice quadrata di meno uno, fu definito un *numero immaginario* e gli si assegnò il simbolo «i». Per contrasto, i matematici iniziarono a chiamare i numeri che si trovavano sulla retta numerica *numeri reali.*

Creare apparentemente dal nulla una soluzione per quest'equazione sembra un imbroglio. Perché non accettare che l'equazione non ammette soluzioni? È un modo possibile di procedere, ma a noi matematici piace essere più ottimisti. Una volta accettata l'idea dell'esistenza di un numero che *effettivamente* risolve l'equazione, i vantaggi del salto di creatività che si è compiuto superano di gran lunga qualsiasi disagio iniziale. Una volta che gli si è assegnato un nome, la sua esistenza sembra inevitabile. Non dà più la sensazione di essere un numero creato artificialmente ma un numero che era lì da sempre, e che sarebbe passato inosservato finché non ci fossimo posti la domanda giusta. I matematici del XVIII secolo erano stati restii ad ammettere che potessero esistere numeri di quel tipo. I matematici del XIX secolo ebbero il coraggio di credere in nuovi modi di pensiero che sfidavano le idee correnti su ciò che costituiva il canone matematico approvato.

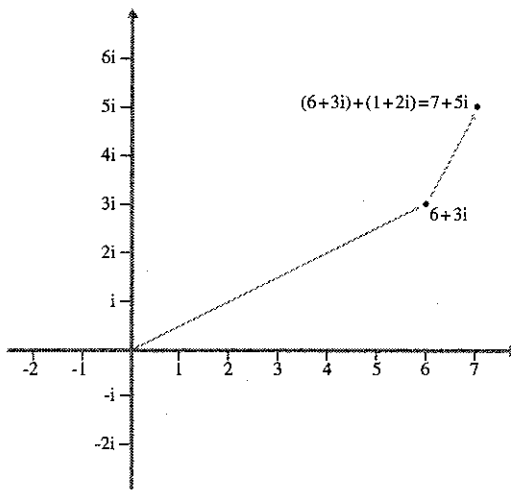
Francamente, la radice quadrata di -1 è tanto astratta quanto lo è la radice quadrata di 2. Entrambe sono definite come soluzioni di equazioni. Ma questo significa che i matematici avrebbero cominciato a creare numeri nuovi per ogni nuova equazione che fosse comparsa? E se volessimo le soluzioni di un'equazione come $x^4 = -1$? Dovremmo forse usare sempre più lettere nel tentativo di dare un nome a tutte que-

ste nuove soluzioni? Fu con un certo sollievo che alla fine Gauss dimostrò, nella sua tesi di dottorato del 1799, che non c'era bisogno di altri numeri nuovi. Usando il numero i, la radice quadrata di −1, i matematici potevano risolvere qualsiasi equazione in cui si fossero imbattuti. Ogni equazione aveva una soluzione che consisteva in una combinazione di ordinari numeri reali (cioè le frazioni e i numeri irrazionali) e di questo nuovo numero, i.

La chiave della dimostrazione di Gauss era l'estensione dell'immagine che già avevamo dei numeri ordinari come punti che giacciono sulla retta numerica: una linea retta che va da est a ovest e in cui ogni punto rappresenta un numero. Questi numeri erano i numeri reali, familiari ai matematici fin dai tempi degli antichi greci. Ma sulla retta non c'era posto per quel nuovo numero immaginario, la radice quadrata di −1. Perciò Gauss si chiese che cosa sarebbe successo se si fosse introdotta una nuova direzione, se per rappresentare i si fosse usato un punto situato al di sopra della retta numerica, alla distanza di un'unità. Tutti i nuovi numeri necessari per risolvere equazioni erano combinazioni di i e di numeri ordinari, per esempio 1 + 2i. Gauss comprese che su questa mappa bidimensionale c'era un punto corrispondente a ogni possibile numero. I numeri immaginari diventavano dunque semplicemente coordinate sulla mappa. Il numero 1 + 2i era rappresentato dal punto che si raggiungeva percorrendo un'unità verso est e due verso nord.

Gauss interpretava questi numeri come coordinate per muoversi nella sua mappa del mondo immaginario. Som-

mare due numeri immaginari $A + Bi$ e $C + Di$ significava seguire due coppie di coordinate, una dopo l'altra. Se, per esempio, sommate 6 + 3i e 1 + 2i, vi porterete nella posizione 7 + 5i (vedi il grafico seguente).



Per sommare due numeri immaginari ci si sposta nel piano di Gauss seguendo le frecce a essi associate.

Benché fosse una rappresentazione molto efficace, Gauss dovette tenere nascosta la sua mappa del mondo immaginario. Una volta costruita la dimostrazione, Gauss rimosse l'impalcatura grafica in modo che non rimanesse traccia della sua visione. Era conscio del fatto che in matematica le figure erano guardate con un certo sospetto a quell'epoca. Il

predominio della tradizione matematica francese durante la giovinezza di Gauss significava che la strada preferita per entrare nel mondo matematico era il linguaggio delle formule e delle equazioni, un linguaggio che si accordava perfettamente con l'approccio utilitario alla disciplina. C'erano anche altre ragioni per questa avversione nei confronti delle immagini.

Per molti secoli i matematici avevano ritenuto che le figure avessero il potere di fuorviare. Dopo tutto il linguaggio della matematica era stato introdotto per addomesticare il mondo fisico. Nel XVII secolo Cartesio aveva tentato di ridurre lo studio della geometria a pure asserzioni su numeri ed equazioni. «Le percezioni dei sensi sono inganni dei sensi» era il suo motto. Riemann era giunto a detestare questo ripudio della rappresentazione fisica leggendo Cartesio nell'agio della biblioteca di Schmalfuss.

Alle soglie del XIX secolo i matematici erano rimasti scottati da un'errata dimostrazione grafica di una formula che descriveva la relazione fra il numero di angoli, spigoli e facce dei solidi geometrici. Eulero aveva avanzato l'ipotesi che se un poliedro possiede V vertici, S spigoli e F facce, allora i numeri V, S e F devono soddisfare la relazione $V - S + F = 2$. Un cubo, per esempio, ha 8 vertici, 12 spigoli e 6 facce. Nel 1811 lo stesso giovane Cauchy aveva elaborato una «dimostrazione» della formula che si basava su un'intuizione visiva, ma rimase molto male quando gli fu mostrato un solido che non obbediva a quella formula: un cubo con un buco al centro.

La «dimostrazione» aveva trascurato il fatto che un solido

poteva contenere dei buchi. Era perciò necessario introdurre nella formula un ingrediente aggiuntivo che tenesse conto del numero di buchi presenti in un solido. Essendo stato beffato da questo potere delle immagini di celare prospettive che da principio non appaiono evidenti, Cauchy cercò rifugio nella sicurezza che sembravano dare le formule. Una delle rivoluzioni di cui fu artefice fu la creazione di un nuovo linguaggio che permise ai matematici di analizzare il concetto di simmetria in modo rigoroso senza dover ricorrere a figure.

Gauss sapeva che la sua mappa segreta dei numeri immaginari sarebbe stata invisa ai matematici della fine del XVIII secolo, perciò la escluse dalla sua dimostrazione. I numeri erano entità da sommare e moltiplicare, non da disegnare. Dovette passare una quarantina d'anni prima che Gauss si decidesse a svelare la verità sull'impalcatura grafica che aveva usato nella sua tesi di dottorato.

Un mondo oltre lo specchio

Pur senza la mappa di Gauss, Cauchy e altri matematici avevano cominciato a esplorare quel che accade se si estende il concetto di funzioni a questo nuovo mondo di numeri immaginari invece di limitarsi ai numeri reali. Con loro sorpresa, i numeri immaginari aprivano nuovi collegamenti fra parti del mondo matematico apparentemente prive di correlazioni.

Una funzione è come un programma di computer in cui

si inserisce un numero, viene eseguito un calcolo e prodotto un altro numero. La funzione può essere definita da una semplice equazione come $x^2 + 1$. Quando vi si inserisce un numero, per esempio 2, la funzione calcola $2^2 + 1$ e produce 5. Altre funzioni sono più complicate. Gauss era interessato alla funzione che contava il numero di numeri primi. Se inserite un numero x in questa funzione, essa vi dice quanti sono i numeri primi minori o uguali a x. Gauss aveva deciso di indicarla con $\pi(x)$. Il suo grafico è una scalinata che sale, come mostrato a p. 95. Ogni volta che il numero inserito nella funzione $\pi(x)$ è un numero primo, il valore numerico che essa produce sale di un gradino sulla scalinata. Quando per esempio x va da 4,9 a 5,1, il numero di primi aumenta passando da due a tre per registrare il nuovo numero primo, 5.

I matematici si resero presto conto che in alcune funzioni, come quella data dall'equazione $x^2 + 1$, era possibile inserire numeri immaginari oltre che numeri ordinari. Per esempio, inserendo $x = 2i$ nella funzione $x^2 + 1$, si ottiene $(2i)^2 + 1 = -4 + 1 = -3$. A introdurre numeri immaginari nelle funzioni si era cominciato nella generazione di Eulero. Già nel 1748, facendo un'escursione in questo mondo oltre lo specchio, Eulero si era imbattuto in strane connessioni tra frammenti separati della matematica. Eulero sapeva che quando si inserivano dei numeri ordinari x nella funzione 2^x, si otteneva un grafico che saliva rapidamente. Ma quando provò a inserire dei numeri immaginari nella funzione, il risultato che ottenne fu alquanto inaspettato. Invece di un grafico che cresceva in modo esponenziale, vide comparire delle onde,

del tipo che associamo, per fare un esempio, ai suoni. La funzione che produce questo tipo di onde è chiamata *funzione seno*. L'immagine della funzione seno è una familiare curva che si ripete ciclicamente, così che ogni 360 gradi vediamo riapparire la stessa forma. Oggi la funzione seno si utilizza in una marea di calcoli pratici. Per esempio, la si può usare per calcolare l'altezza di un edificio misurando degli angoli da terra. Fu la generazione di Eulero a scoprire che queste onde sinusoidali erano anche la chiave per riprodurre i suoni musicali. Una nota pura come il la prodotto da un diapason che si usa per accordare un pianoforte si può rappresentare per mezzo di un'onda sinusoidale.

Eulero inserì dunque dei numeri immaginari nella funzione 2^x. Con sua sorpresa, ciò che ne uscì furono le onde corrispondenti a una particolare nota musicale. Eulero mostrò che le caratteristiche di ogni singola nota dipendevano dalle coordinate del corrispondente numero immaginario. Quanto più un numero si trova a nord, tanto maggiore è l'altezza della nota a esso associata. Quanto più si trova a est, tanto maggiore è l'intensità della nota. La scoperta di Eulero era il primo indizio del fatto che i numeri immaginari potevano aprire nuovi e inaspettati sentieri nel paesaggio matematico. Sulle orme di Eulero, i matematici cominciarono ad avventurarsi nella terra da poco scoperta dei numeri immaginari. La ricerca di nuovi collegamenti diventava contagiosa.

Riemann ritornò a Gottinga nel 1849 per completare la sua tesi di dottorato e sottoporla alla valutazione di Gauss. Quello era l'anno in cui Gauss scrisse al suo amico Encke a

proposito della connessione fra numeri primi e logaritmi che aveva scoperto da ragazzino. Anche se è probabile che Gauss abbia discusso della sua scoperta con i membri della facoltà a Gottinga, Riemann non si preoccupava ancora dei numeri primi. Era totalmente preso dalla nuova matematica che arrivava da Parigi, ansioso di esplorare lo strano mondo di funzioni alimentate con numeri immaginari che stava emergendo.

Cauchy aveva messo mano al compito di trasformare i primi incerti passi di Eulero in quel nuovo territorio in una disciplina rigorosa. Ma se i francesi erano maestri nelle equazioni e nella manipolazione delle formule, Riemann era pronto a far tesoro del ritorno della didattica tedesca a una concezione più astratta del mondo. Nel novembre 1851 le sue idee avevano ormai preso forma ed egli presentò la sua dissertazione alla facoltà di Gottinga. Ovviamente le idee di Riemann colpirono molto Gauss. Egli salutò la sua tesi di dottorato come il segno evidente «di una mente creativa, attiva, genuinamente matematica, e di un'originalità magnificamente fertile».

Riemann scrisse a suo padre, ansioso di riferirgli dei progressi che stava facendo: «Credo di aver migliorato le mie aspettative con la dissertazione. Spero anche di imparare per tempo a scrivere più velocemente e in modo più scorrevole, soprattutto se mi inserirò in società». Ma la vita accademica a Gottinga non era paragonabile con quella eccitante di Berlino. L'università era molto chiusa, provinciale, e a Riemann mancava la sicurezza in se stesso per entrare in conflitto con

la vecchia gerarchia intellettuale. C'erano meno studenti a Gottinga con cui potesse stabilire un rapporto. Era sospettoso verso gli altri e non si trovava mai veramente a proprio agio in un ambiente sociale. «Ha fatto le cose più strane qui solo perché crede che nessuno lo sopporti» scrisse il suo contemporaneo Richard Dedekind. Riemann era un ipocondriaco soggetto a crisi di depressione. Celava il volto dietro la sicurezza di una barba nera sempre più folta. Era estremamente ansioso riguardo alle proprie finanze, dato che la sua sopravvivenza dipendeva dagli incerti onorari di una mezza dozzina di studenti privati. Il carico di lavoro che si assumeva unito alle pressioni dell'indigenza produsse un breve esaurimento nervoso nel 1854. Ma il suo umore si rischiarava ogni volta che Dirichlet, il campione della tradizione matematica berlinese, si recava in visita a Gottinga.

Un professore di Gottinga con il quale Riemann riuscì a stringere amicizia fu l'eminente fisico Wilhelm Weber. Weber aveva collaborato con Gauss in numerosi progetti nel periodo che avevano trascorso insieme a Gottinga. Divennero uno Sherlock Holmes e un dottor Watson della scienza, con Gauss che forniva le basi teoriche e Weber che le metteva in pratica. Una delle loro invenzioni più famose fu l'applicazione delle potenzialità dell'elettromagnetismo per comunicare a distanza. Riuscirono a impiantare una linea telegrafica fra l'osservatorio di Gauss e il laboratorio di Weber attraverso cui si scambiavano messaggi.

Se Gauss considerava quell'invenzione una semplice curiosità, Weber si rese conto chiaramente della portata di

quella scoperta. «Quando il globo terrestre sarà ricoperto da una rete di strade ferrate e di fili telegrafici» scrisse «questa rete renderà servigi paragonabili a quelli del sistema nervoso nel corpo umano, in parte come mezzo di trasporto, in parte come mezzo per la propagazione di idee e sensazioni con la velocità del fulmine.» La rapida diffusione del telegrafo, insieme alla successiva applicazione alla sicurezza informatica del calcolatore a orologio inventato da Gauss, fanno di Gauss e Weber i nonni dell'e-business e di Internet. Nella città di Gottinga la loro collaborazione è immortalata in una statua che li ritrae insieme.

Una persona che fu ospite di Weber a Gottinga ne dipinge la tipica immagine dello scienziato un po' matto: «Un curioso piccoletto che parla con voce stridula, sgradevole ed esitante. Parla e balbetta senza sosta; non si può far altro che starlo a sentire. Qualche volta ride senza alcuna ragione, e ci si rammarica di non potersi unire a lui». In Weber c'era un po' più del ribelle rispetto a Gauss. Era stato uno dei «Sette di Gottinga», professori espulsi temporaneamente dall'università nel 1837 per aver protestato contro il governo arbitrario del re dell'Hannover. Dopo aver completato la sua tesi, per un certo tempo Riemann fu assistente di Weber. Nel corso di questo apprendistato maturò un debole per la figlia di Weber, ma le sue avance non erano corrisposte.

Nel 1854 Riemann scrisse a suo padre: «Gauss è seriamente ammalato e i medici temono che la sua morte sia imminente». Aveva paura che Gauss potesse morire prima di sottoporlo all'esame di abilitazione, indispensabile per diventare

docente in un'università tedesca. Fortunatamente Gauss visse abbastanza a lungo per ascoltare le idee di Riemann sulla geometria e i suoi rapporti con la fisica che erano germinate nel periodo in cui aveva lavorato con Weber. Riemann era convinto che fosse possibile rispondere a tutte le questioni fondamentali della fisica usando la sola matematica. Gli sviluppi della fisica negli anni seguenti avrebbero confermato la giustezza della sua fede nella matematica. Molti considerano la teoria della geometria di Riemann uno dei suoi contributi scientifici più significativi, ed essa sarebbe diventata una delle assi portanti della piattaforma da cui Einstein lanciò la sua rivoluzione scientifica all'inizio del XX secolo.

Un anno dopo Gauss morì. Ma se l'uomo se n'era andato, le sue idee avrebbero tenuto i matematici occupati per le generazioni a venire. Sull'ipotizzato legame fra numeri primi e funzione logaritmo che aveva lasciato dietro di sé avrebbe rimuginato la generazione seguente. Gli astronomi lo immortalarono nel firmamento battezzando un asteroide Gaussia. E nella collezione anatomica dell'università di Gottinga si può ancora trovare, conservato in salamoia per l'eternità, il cervello di Gauss, che si diceva fosse più ricco di circonvoluzioni di ogni altro cervello dissezionato in precedenza.

Dirichlet, alle cui lezioni Riemann aveva assistito a Berlino, fu nominato titolare della cattedra lasciata vacante da Gauss. Avrebbe portato a Gottinga una po' della vivace attività intellettuale che Riemann aveva tanto gradito durante il suo soggiorno berlinese. Un matematico inglese annotò l'impressione che ebbe di Dirichlet quando gli fece visita a

Gottinga in quel periodo: «È un uomo piuttosto alto, d'aspetto segaligno, con baffi e barba che stanno per ingrigire [...] ha una voce un po' stridula ed è piuttosto sordo: era ancora presto, non si era lavato né rasato, aveva il suo *Schlafrock* [la veste da camera], le pantofole, una tazza di caffè e un sigaro». A dispetto di questa apparenza da bohémien, dentro di lui ardeva un desiderio di rigore e un amore per le dimostrazioni che all'epoca non avevano eguali. Carl Jacobi, suo coetaneo e collega a Berlino, scrisse al primo protettore di Dirichlet, Alexander von Humboldt, che «soltanto Dirichlet, non io né Cauchy né Gauss, sa che cos'è una dimostrazione perfettamente rigorosa, mentre noi lo impariamo soltanto da lui. Quando Gauss dice di aver dimostrato qualcosa, io penso che molto probabilmente sia vero; quando lo dice Cauchy, è una scommessa alla pari; quando lo dice Dirichlet, è una certezza».

L'arrivo di Dirichlet a Gottinga cominciò a scuotere il tessuto sociale della città. Sua moglie Rebecka era la sorella del compositore Felix Mendelssohn. Rebecka detestava il soporifero ambiente sociale di Gottinga e diede numerosi ricevimenti per cercare di ricreare l'atmosfera dei salotti berlinesi che era stata costretta a lasciare.

L'atteggiamento meno formale di Dirichlet nei confronti della gerarchia accademica significò per Riemann la possibilità di discutere apertamente di matematica con il nuovo professore. Dopo essere tornato a Gottinga da Berlino, Riemann si era alquanto isolato. A causa della personalità austera del vecchio Gauss e della propria timidezza, aveva discus-

so poco con il grande maestro. Al contrario, i modi rilassati di Dirichlet erano perfetti per Riemann che, in un'atmosfera più favorevole alla discussione, cominciò ad aprirsi. A proposito del suo nuovo mentore, Riemann scrisse al padre: «Il mattino dopo Dirichlet è stato con me per due ore. Ha letto per intero la mia dissertazione ed è stato molto cordiale, una cosa che non mi sarei certo aspettato considerando la grande differenza di rango fra noi».

A sua volta Dirichlet apprezzava la modestia di Riemann e riconosceva l'originalità del suo lavoro. In qualche occasione riuscì persino a trascinarlo fuori dalla biblioteca e a portarlo con sé a passeggiare nelle campagne che circondano Gottinga. Quasi in tono di scusa, Riemann scrisse al padre che quelle fughe dalla matematica gli erano più utili dal punto di vista scientifico che se fosse rimasto a casa a compulsare i suoi libri. Fu durante una delle discussioni tenute camminando per i boschi della Bassa Sassonia che Dirichlet ispirò il passo successivo di Riemann. Esso avrebbe aperto una prospettiva completamente nuova sui numeri primi.

La funzione zeta: il dialogo fra musica e matematica

Durante gli anni trascorsi a Parigi prima del 1830, Dirichlet era rimasto affascinato dal grande trattato giovanile di Gauss *Disquisitiones arithmeticae*. Benché segnasse l'inizio della teoria dei numeri come disciplina indipendente, quel libro era difficile e molti non riuscivano a penetrare lo stile

conciso che Gauss prediligeva. Tuttavia Dirichlet era più che felice di battagliare con quella sequela ininterrotta di paragrafi ostici. La notte metteva il libro sotto il cuscino nella speranza che la mattina dopo la lettura avrebbe improvvisamente rivelato un senso compiuto. Il trattato di Gauss era stato descritto come un «libro dei sette sigilli», ma grazie alle fatiche e ai sogni di Dirichlet, quei sigilli furono spezzati e i tesori conservati all'interno ottennero l'ampia diffusione che meritavano.

A Dirichlet interessava soprattutto l'orologio calcolatore di Gauss. In particolare lo intrigava una congettura formulata da Fermat. Se si prendesse un calcolatore a orologio con *N* ore sul quadrante e vi si inserissero i numeri primi, allora, aveva ipotizzato Fermat, l'orologio segnerebbe l'una un numero infinito di volte. Se, per fare un esempio, prendete un orologio con quattro ore sul quadrante, in base alla congettura di Fermat ci sono infiniti numeri primi che divisi per 4 danno resto 1. L'elenco inizia con 5, 13, 17, 29, ...

Nel 1838, all'età di trentatré anni, Dirichlet aveva lasciato il proprio segno nel campo della teoria dei numeri dimostrando che l'intuizione di Gauss era effettivamente corretta. Ci riuscì mischiando idee provenienti da varie aree della matematica che non sembravano aver nulla a che fare fra loro. Invece di un'argomentazione elementare come quella che aveva permesso a Euclide di dimostrare che esistono infiniti numeri primi, Dirichlet usò una funzione sofisticata che era apparsa per la prima volta nel circuito matematico ai tempi di Eulero. Si chiamava *funzione zeta*, e la si indicava con la

lettera greca ζ. L'equazione seguente fornì a Dirichlet la regola per calcolare il valore della funzione zeta in corrispondenza di un numero x:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots$$

Per eseguire il calcolo, Dirichlet doveva portare a termine tre passaggi matematici. Primo, calcolare i valori delle potenze 1^x, 2^x, 3^x, ..., n^x, ... Poi, prendere gli inversi di tutti i numeri ottenuti nel primo passaggio. (L'inverso di 2^x è $1/2^x$.) Infine, sommare tutti i risultati ricavati con il secondo passaggio.

È una ricetta complicata. Il fatto che ogni numero 1, 2, 3, ... contribuisca alla sua definizione, è un indizio dell'utilità della funzione zeta per il teorico dei numeri. Il rovescio della medaglia è che si ha a che fare con una somma infinita di numeri. Pochi matematici avrebbero potuto prevedere quanto potente si sarebbe rivelata questa funzione come strumento per lo studio dei numeri primi. Lo si scoprì quasi per caso.

L'origine dell'interesse dei matematici per questa somma infinita veniva dalla musica e risaliva a una scoperta fatta dagli antichi greci. Era stato infatti Pitagora a individuare per primo il nesso fondamentale che lega matematica e musica. Egli aveva riempito un'urna d'acqua e l'aveva percossa con un martelletto per produrre una nota. Quando aveva rimosso metà dell'acqua e aveva percosso di nuovo l'urna, la nota era salita di un'ottava. Ogni volta che rimuoveva altra acqua in modo da lasciare l'urna piena per un terzo, per un quarto

e così via, al suo orecchio le note che si producevano apparivano in armonia con la prima nota che aveva ottenuto. Tutte le altre note create rimuovendo una diversa quantità d'acqua dall'urna apparivano invece in dissonanza con la nota originaria. Queste frazioni contenevano una bellezza che si poteva ascoltare. L'armonia che Pitagora aveva scoperto nei numeri 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... lo indusse a credere che l'intero universo fosse controllato dalla musica, ed è per questo che coniò l'espressione «la musica delle sfere».

A partire dalla scoperta pitagorica di un nesso aritmetico fra matematica e musica, le caratteristiche estetiche e fisiche delle due discipline sono sempre state accostate. Scriveva il compositore barocco francese Jean-Philippe Rameau nel 1722: «Nonostante tutta l'esperienza che io possa aver acquisito nella musica per il fatto di essermi associato tanto a lungo con essa, devo confessare che solo con l'aiuto della matematica le mie idee si sono chiarite». Eulero cercò di fare della teoria musicale «una parte della matematica e di dedurre in modo ordinato, da principi corretti, tutto ciò che può rendere piacevole un'unione e una mescolanza di toni». Eulero riteneva che dietro la bellezza di certe combinazioni di note si nascondessero i numeri primi.

Molti matematici hanno un'attrazione naturale per la musica: dopo una dura giornata di calcoli, Eulero amava rilassarsi suonando il suo clavicembalo. I dipartimenti di matematica non hanno mai grossi problemi a mettere insieme un'orchestra attingendo ai propri ranghi. C'è un ovvio nesso numerico fra i due campi, dato che entrambi si basano sul

fatto di contare. Per citare la definizione di Leibniz, «la musica è il piacere che la mente umana prova quando conta senza essere conscia di contare». Ma le assonanze fra musica e matematica sono molto più profonde.

La matematica è una disciplina estetica, in cui si parla di continuo di dimostrazioni magnifiche e di soluzioni eleganti. Solo chi possiede una speciale sensibilità estetica dispone dei mezzi per compiere scoperte matematiche. Il lampo d'illuminazione a cui i matematici anelano assomiglia sovente all'atto di battere sui tasti di un pianoforte finché all'improvviso non si trova una combinazione di note che contiene un'armonia interna, un'armonia che ne segnala la peculiarità.

G.H. Hardy scriveva di essere «interessato alla matematica solo come arte creativa». Persino per i matematici francesi delle accademie napoleoniche l'eccitazione del fare matematica non veniva dalle sue applicazioni pratiche ma dalla sua intima bellezza. Le esperienze estetiche che si vivono facendo matematica o ascoltando musica hanno molto in comune. Proprio come si può riascoltare molte volte un brano musicale per scoprire nuove sonorità che in precedenza erano sfuggite, così spesso i matematici traggono piacere dalla rilettura di una dimostrazione in cui si manifestano un po' per volta le sottili sfumature che in modo tanto naturale le conferiscono coerenza logica. Hardy pensava che la verifica autentica di una buona dimostrazione matematica fosse il fatto che «le idee devono combinarsi in maniera armonica. La bellezza è la prima verifica: non c'è un posto duraturo al mondo

per la brutta matematica». Per Hardy, «una dimostrazione matematica dovrebbe assomigliare a una costellazione semplice e dai contorni netti, non a una Via Lattea dispersa».

Tanto la matematica quanto la musica hanno un linguaggio tecnico fatto di simboli che ci permettono di esprimere con chiarezza i motivi che creiamo o scopriamo. La musica è molto più delle aste e dei tagli che danzano per il pentagramma. Analogamente, i simboli matematici prendono vita solo quando è la mente a eseguire la matematica.

Come scoprì Pitagora, non è soltanto nel dominio estetico che la matematica e la musica si sovrappongono. La fisica stessa della musica ha alla propria radice i fondamenti della matematica. Se soffiate sopra il collo di una bottiglia potete sentire una nota. Se soffiate più forte, e con un po' di perizia, comincerete a sentire delle note più acute, le armoniche superiori. Quando un musicista suona una nota su uno strumento, produce anche un'infinità di armoniche, proprio come fate voi quando soffiate sul collo di una bottiglia. Queste armoniche supplementari contribuiscono a dare a ciascun strumento il suo timbro distintivo. Sono le caratteristiche fisiche di ogni singolo strumento a farci sentire diverse combinazioni di armoniche. Oltre alla nota fondamentale, il clarinetto produce solo quelle armoniche a cui corrispondono frazioni dispari: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, ... La corda di un violino, d'altra parte, vibrando crea tutte le armoniche che Pitagora produsse con la sua urna: quelle corrispondenti alle frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...

Poiché il suono di una corda di violino che vibra è la somma infinita della nota fondamentale e di tutte le armoniche

possibili, i matematici cominciarono a essere affascinati dall'entità matematica corrispondente. La somma infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ prese il nome di *serie armonica*. Questa somma era anche il risultato che Eulero otteneva quando inseriva il numero $x = 1$ nella funzione zeta. Benché il valore della somma cresca molto lentamente man mano che si aggiungono nuovi termini, fin dal XIV secolo i matematici sapevano che alla fine doveva inesorabilmente andarsene all'infinito.

Dunque la funzione zeta deve produrre un risultato infinito quando vi si inserisce il numero $x = 1$. Ma se, invece di prendere $x = 1$, Eulero inseriva nella funzione un numero più grande, la somma non se ne andava più all'infinito. Per esempio, prendere $x = 2$ significa sommare tutti i quadrati della serie armonica:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Questo è un numero più piccolo, dato che non comprende tutte le possibili frazioni che compongono la serie armonica quando x è uguale a 1. Ora si stanno sommando solo alcune di quelle frazioni, ed Eulero sapeva che in questo caso la somma non se ne sarebbe andata all'infinito ma avrebbe puntato verso un numero particolare. A quel tempo, identificare il preciso valore numerico a cui tendeva la serie armonica per $x = 2$ era diventata una sfida formidabile. La miglior stima non si discostava molto da $\frac{8}{5}$. Nel 1735 Eulero scriveva: «È tanto il lavoro fatto sulle serie che sembra ben poco probabile che possa saltar fuori qualcosa di nuovo al riguardo [...] An-

ch'io, nonostante gli sforzi ripetuti, non sono riuscito a ottenere altro che valori approssimati delle loro somme».

Nondimeno Eulero, incoraggiato dalle sue scoperte precedenti, cominciò a giocherellare con quella somma infinita. Ruotandola in tutti i possibili versi come le facce di un cubo di Rubik, si ritrovò improvvisamente davanti la serie trasfigurata. Come i colori del cubo, i numeri si composero lentamente per formare un motivo completamente diverso da quello da cui era partito. Proseguiva Eulero: «Ora, tuttavia, in modo del tutto inaspettato, ho trovato una formula elegante che dipende dalla quadratura del cerchio». In termini moderni, aveva trovato una formula che dipendeva dal numero $\pi = 3{,}1415...$

Con un'analisi piuttosto temeraria, Eulero aveva scoperto che quella somma infinita tendeva al quadrato di π diviso per 6:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... = \frac{1}{6}\pi^2$$

L'espansione decimale di $\frac{1}{6}\pi^2$, come quella di π, è completamente caotica e imprevedibile. Ancora oggi la scoperta compiuta da Eulero di quest'ordine celato all'interno del numero $\frac{1}{6}\pi^2$ rimane uno dei calcoli più affascinanti di tutta la matematica; a quell'epoca travolse la comunità scientifica come un uragano. Nessuno aveva previsto l'esistenza di un nesso fra l'innocente somma $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ...$ e il caotico numero π.

Il successo ottenuto indusse Eulero a indagare ulterior-

mente i poteri della funzione zeta. Sapeva che se avesse inserito un qualsiasi numero maggiore di 1 nella funzione, il risultato sarebbe sempre stato un numero finito. Dopo alcuni anni di studi solitari, riuscì a identificare i valori prodotti dalla funzione zeta per tutti i numeri pari. Ma c'era qualcosa di decisamente insoddisfacente nella funzione zeta. Tutte le volte che Eulero inseriva nella formula che definisce la funzione un numero minore di 1, qualunque esso fosse, il risultato che otteneva era infinito. Per esempio, per $x = -1$ la formula produce la somma infinita $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ La funzione si comportava bene solo per i numeri maggiori di 1.

La scoperta da parte di Eulero dell'espressione di $\frac{1}{6}\pi^2$ in termini di semplici frazioni fu il primo segnale del fatto che la funzione zeta avrebbe potuto rivelare nessi inaspettati fra parti apparentemente disgiunte del canone matematico. Il secondo strano nesso che Eulero scoprì fu con una sequenza ancora più imprevedibile di numeri.

Una riscrittura della storia greca dei numeri primi

I numeri primi fecero la loro improvvisa comparsa nella storia di Eulero quando egli stava tentando di appoggiare la sua traballante analisi dell'espressione di $\frac{1}{6}\pi^2$ su solide basi matematiche. Mentre giocava con le somme infinite, gli tornò in mente una scoperta fatta dagli antichi greci: ogni numero può essere costruito moltiplicando fra loro dei numeri primi. Si rese allora conto che esisteva un modo alternativo di

scrivere la funzione zeta, che era possibile scomporre ogni termine della serie armonica sfruttando la conoscenza del fatto che ogni numero è costituito dagli stessi elementi di base, e che questi elementi di base sono i numeri primi. Per esempio, Eulero poteva scrivere $\frac{1}{60}$ come segue:

$$\frac{1}{60}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}$$

Invece di esprimere la serie armonica come somma infinita di tutte le frazioni, Eulero poteva prendere soltanto le frazioni che contenevano numeri primi, come $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, ..., e moltiplicarle fra loro. L'espressione che ottenne, oggi nota con il nome di *prodotto di Eulero*, collegava i mondi dell'addizione e della moltiplicazione. Da un lato della nuova equazione compariva la funzione zeta e dall'altro lato comparivano i numeri primi:

$$\zeta(x)=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots\right)\times\left(1+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{9^x}+\ldots\right)\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{p^x}+\frac{1}{(p^2)^x}+\ldots\right)\times\ldots$$

A prima vista non si ha l'impressione che il prodotto di Eulero ci possa essere d'aiuto nella nostra caccia alla comprensione dei numeri primi. Dopo tutto, è semplicemente un altro modo di esprimere qualcosa che era già noto ai greci più di duemila anni fa. In effetti, lo stesso Eulero non avrebbe afferrato appieno la portata della sua riscrittura di questa proprietà dei primi.

Ci vollero altri cent'anni, e la capacità di penetrazione di Dirichlet e di Riemann, per rendersi conto della portata del prodotto di Eulero. Rigirando quella pietra preziosa greca e osservandola dalla prospettiva del XIX secolo, emerse un nuovo orizzonte matematico che gli antichi greci non avrebbero mai potuto immaginare. A Berlino, Dirichlet era rimasto affascinato dal modo in cui Eulero aveva usato la funzione zeta per esprime una proprietà importante dei numeri primi, una proprietà che i greci avevano dimostrato duemila anni prima. Quando Eulero inseriva il numero 1 nella funzione zeta, il risultato di $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ se ne andava all'infinito. Egli capì che ciò poteva verificarsi solo se esistevano infiniti numeri primi. La chiave per giungere a questa conclusione fu il prodotto di Eulero, che metteva in relazione la funzione zeta con i numeri primi. Anche se gli antichi greci avevano dimostrato molti secoli prima che esistevano infiniti numeri primi, l'inedita dimostrazione di Eulero conteneva concetti completamente diversi da quelli usati da Euclide.

Esprimere nozioni familiari in un nuovo linguaggio a volte aiuta. La riformulazione di Eulero suggerì a Dirichlet di usare la funzione zeta per dimostrare la predizione di Fermat secondo cui esistevano infiniti numeri primi che avrebbero dato come risultato 1 su un calcolatore a orologio. Le idee di Euclide non erano state di nessun aiuto per confermare l'intuizione di Fermat. La dimostrazione di Eulero, al contrario, fornì a Dirichlet la flessibilità che gli permise di contare soltanto i numeri primi che, divisi per un numero intero *N*, davano resto 1. Funzionò. Dirichlet fu il primo a usare le idee

di Eulero espressamente per scoprire qualcosa di nuovo sui numeri primi. Era un grosso passo avanti nella comprensione di questi numeri unici, ma la strada per raggiungere il Santo Graal rimaneva ancora lunga.

Con il trasferimento di Dirichlet a Gottinga era solo una questione di tempo prima che il suo interesse per la funzione zeta si trasmettesse a Riemann. È probabile che Dirichlet abbia parlato a Riemann del potere di quelle somme infinite. Ma la testa di Riemann era ancora piena dello strano mondo di numeri immaginari creato da Cauchy. Per lui, la funzione zeta rappresentava soltanto un'altra funzione interessante in cui inserire numeri immaginari invece dei numeri ordinari con i quali lavoravano i suoi contemporanei.

Una nuova, strana veduta cominciò ad aprirsi davanti agli occhi di Riemann. Quanti più calcoli buttava giù sui fogli che ricoprivano la sua scrivania, tanto più cresceva la sua eccitazione. Si trovò risucchiato in un tunnel spaziale che lo condusse dal mondo astratto delle funzioni immaginarie a quello dei numeri primi. All'improvviso riusciva a scorgere un metodo che poteva spiegare perché la stima di Gauss sul numero di numeri primi si sarebbe mantenuta precisa come Gauss aveva predetto. Grazie all'uso della funzione zeta, sembrava che la chiave per dimostrare la congettura di Gauss sui numeri primi fosse alla portata di Riemann. Essa avrebbe trasformato l'intuizione di Gauss nella dimostrazione certa che lo stesso Gauss aveva agognato. I matematici avrebbero finalmente avuto la certezza che la differenza percentuale fra il logaritmo integrale e il numero effettivo di numeri primi

si riduceva man mano che si procedeva a contare. Ma le scoperte di Riemann andarono ben oltre quella singola idea. Egli si trovò a osservare i numeri primi da una prospettiva totalmente nuova. All'improvviso la funzione zeta si era messa a suonare una musica che aveva la capacità di svelare i segreti dei numeri primi.

La vena di perfezionismo paralizzante che aveva afflitto Riemann ai tempi della scuola quasi gli impedì di mettere per iscritto una sola delle sue scoperte. Era stato influenzato dall'insistenza di Gauss sull'opportunità di pubblicare soltanto dimostrazioni perfette, assolutamente prive di lacune. Malgrado ciò, si sentì obbligato a spiegare e a interpretare una parte della nuova musica che sentiva. Era stato appena chiamato all'Accademia di Berlino, dove ci si aspettava che i nuovi membri presentassero relazioni scritte sulle loro ricerche recenti. Questo gli fornì un termine improrogabile entro cui produrre un saggio su queste nuove idee. Sarebbe stato un modo appropriato di mostrare all'Accademia la sua gratitudine per l'influenza e i consigli di Dirichlet e per i due anni che aveva passato all'università come studente di dottorato. Dopo tutto, Berlino era il luogo in cui era venuto a conoscenza per la prima volta del potere di aprire nuove vedute che avevano i numeri immaginari.

Nel novembre 1859 Riemann pubblicò un saggio sulle sue scoperte nelle note mensili dell'Accademia di Berlino. Quelle dieci pagine di densa matematica erano destinate a rimanere le sole che Riemann avrebbe pubblicato sul tema dei numeri primi, e tuttavia il suo saggio avrebbe avuto un

effetto fondamentale sul modo in cui essi sarebbero stati percepiti. La funzione zeta fornì a Riemann uno specchio in cui i numeri primi apparivano trasformati. Come in *Alice nel paese delle meraviglie*, attraverso la tana di un coniglio il saggio di Riemann risucchiò i matematici dal mondo che era loro familiare in un territorio matematico nuovo e pieno di sorprese inaspettate. Quando, nei decenni seguenti, riuscirono un po' alla volta a fare i conti con quella nuova prospettiva, i matematici compresero l'inevitabilità e la genialità delle idee di Riemann.

Nonostante le sue qualità visionarie, quel saggio di dieci pagine era profondamente frustrante. Come Gauss, quando scriveva Riemann copriva spesso le proprie tracce. Si dicono tante cose sui risultati che Riemann affermava di poter dimostrare ma che a suo giudizio non erano assolutamente pronti per essere pubblicati. Da un certo punto di vista è già un miracolo che abbia scritto il suo saggio sui numeri primi, considerate le lacune che conteneva. Se avesse continuato a procrastinare, probabilmente saremmo stati privati di una congettura in particolare che egli ammetteva persino di non poter dimostrare. Sepolto nel suo documento di dieci pagine, quasi invisibile, c'è un enunciato del problema la cui soluzione vale oggi un milione di dollari: l'ipotesi di Riemann.

A differenza di quanto accade con molte delle asserzioni fatte nel suo saggio, Riemann è piuttosto schietto riguardo alle proprie limitazioni quando parla dell'ipotesi che prenderà il suo nome: «Naturalmente sarebbe bello avere una dimostrazione rigorosa di ciò, ma ho accantonato la ricerca di

una tale dimostrazione dopo alcuni brevi tentativi infruttuosi, poiché essa non è necessaria per l'obbiettivo immediato della mia ricerca». Lo scopo principale del suo saggio berlinese era confermare che la funzione di Gauss avrebbe fornito un'approssimazione sempre migliore del numero di numeri primi man mano che si fosse proceduto a contare. Benché fosse riuscito a trovare gli strumenti che alla fine avrebbero permesso di dimostrare la congettura di Gauss sui numeri primi, anche quel risultato era irraggiungibile. Ma se Riemann non fornì tutte le risposte, il suo saggio indicò un approccio completamente nuovo alla materia, un approccio che avrebbe stabilito il corso della teoria dei numeri fino ai nostri giorni.

Dirichlet, che avrebbe sicuramente accolto con grande entusiasmo la scoperta di Riemann, morì il 5 maggio 1859, pochi mesi prima che il saggio fosse pubblicato. La ricompensa di Riemann per il proprio lavoro fu la cattedra universitaria che un tempo era stata occupata da Gauss e che ora la morte di Dirichlet aveva reso vacante.

4

L'ipotesi di Riemann: da numeri primi casuali a zeri ordinati

L'ipotesi di Riemann è un enunciato matematico secondo cui è possibile decomporre i numeri primi in musica. Affermare che i numeri primi abbiano della musica in sé è un modo poetico di descrivere questo teorema matematico. Tuttavia, quella è una musica decisamente postmoderna.

Michael Berry, università di Bristol

Riemann aveva scovato un passaggio che conduceva dal mondo familiare dei numeri a una matematica che sarebbe parsa assolutamente aliena ai matematici greci che avevano studiato i numeri primi duemila anni prima di lui. Egli aveva innocentemente mescolato i numeri immaginari con la sua funzione zeta, scoprendo, come un alchimista della matematica, il tesoro che emergeva da quella miscela di elementi, un tesoro che generazioni di matematici avevano cercato invano. Riemann aveva stipato le sue idee in un saggio di dieci pagine, ma era del tutto consapevole del fatto che quelle idee avrebbero aperto vedute radicalmente nuove sui numeri primi.

La capacità di Riemann di liberare tutta la potenza della funzione zeta trae origine dalle scoperte cruciali che egli fece durante gli anni trascorsi a Berlino e nel corso dei successivi studi di dottorato a Gottinga. Ciò che aveva impressionato tanto Gauss mentre esaminava la tesi di Riemann era il forte intuito geometrico che il giovane matematico dimostrava di possedere quando inseriva numeri immaginari nelle funzioni. Dopo tutto Gauss stesso aveva tratto profitto da una propria immagine mentale privata per tracciare i contorni dei numeri immaginari, prima di smontare quell'impalcatura concettuale. Il punto da cui era partito Riemann per elaborare la sua teoria delle funzioni immaginarie era stato il lavoro compiuto da Cauchy, e per Cauchy una funzione era definita da un'equazione. Adesso Riemann aveva aggiunto l'idea che anche se l'equazione era il punto di partenza, era la geometria del grafico definito dall'equazione a essere davvero importante.

Il problema è che non è possibile disegnare il grafico completo di una funzione in cui si inseriscono numeri immaginari. Per illustrare il suo grafico, Riemann aveva bisogno di lavorare in quattro dimensioni. Quale significato danno i matematici a una quarta dimensione? Chi ha letto i libri scritti da cosmologi come Stephen Hawking potrebbe legittimamente rispondere «il tempo». La verità è che noi matematici usiamo le dimensioni per seguire l'andamento di qualsiasi cosa ci possa interessare. In fisica ci sono tre dimensioni per lo spazio e una quarta dimensione per il tempo. Gli economisti che desiderano indagare le relazioni che legano tassi d'interesse, inflazione, disoccupazione e debito nazionale possono in-

terpretare l'economia come un paesaggio in quattro dimensioni. Così, mentre risalgono lungo la direzione dei tassi d'interesse, possono esplorare ciò che accade all'economia nelle altre tre direzioni. Anche se in realtà non è possibile disegnare un'immagine di questo modello quadridimensionale dell'economia, esso rimane pur sempre un paesaggio di cui possiamo analizzare le alture e gli avvallamenti.

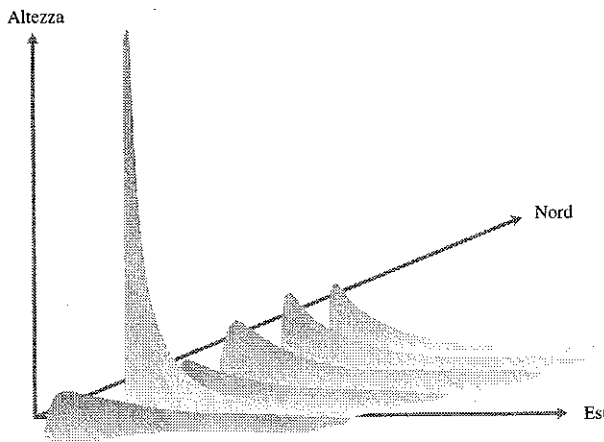
Per Riemann la funzione zeta era descritta da un analogo paesaggio in quattro dimensioni. Due dimensioni servivano a tracciare le coordinate dei numeri immaginari inseriti nella funzione zeta. La terza e la quarta dimensione si potevano poi utilizzare per registrare le due coordinate che descrivono il numero immaginario prodotto dalla funzione.

Il problema è che viviamo in uno spazio a tre dimensioni e perciò non possiamo basarci sul mondo visibile per comprendere questo nuovo «diagramma immaginario». I matematici hanno usato il linguaggio della matematica per allenare le loro capacità di visualizzazione mentale, in modo che li aiuti a «vedere» simili strutture. Ma anche se non siete in possesso di queste lenti matematiche, esistono altri modi per aiutarvi a penetrare questi mondi a più dimensioni. Uno dei metodi migliori per comprenderli è guardare le ombre. L'ombra che proiettiamo è un'immagine bidimensionale del nostro corpo tridimensionale. Se la si osserva da certe prospettive un'ombra fornisce poche informazioni, ma vista di profilo, per esempio, la silhouette di una persona può rivelare quanto basta per consentirci di riconoscerne il volto. In modo simile, possiamo costruire un'ombra tridimensionale

del paesaggio a quattro dimensioni che Riemann creò usando la funzione zeta, un'ombra che conservi informazioni sufficienti a permetterci di cogliere le idee di Riemann.

La mappa bidimensionale dei numeri immaginari ideata da Gauss dà una rappresentazione grafica dei numeri che inseriremo nella funzione zeta. L'asse nord-sud registra il numero di passi che compiremo nella direzione immaginaria, mentre l'asse est-ovest rappresenta i numeri reali. Possiamo distendere questa mappa su un tavolo. Ciò che vogliamo fare è creare un paesaggio fisico situato nello spazio che sta al di sopra di questa mappa. L'ombra della funzione zeta si trasformerà allora in un oggetto fisico di cui potremo esplorare i picchi e le valli.

L'altezza del paesaggio al di sopra di ciascun numero immaginario della mappa dovrebbe registrare il risultato che si ottiene inserendo quel numero nella funzione zeta. Per la stessa ragione per cui un'ombra mostra solo pochi dettagli di un oggetto tridimensionale, alcune informazioni vanno inevitabilmente perse nella costruzione grafica di un tale paesaggio. Ruotando l'oggetto, otteniamo ombre diverse che ne rivelano aspetti diversi. Analogamente, abbiamo a disposizione un certo numero di scelte riguardo a ciò che vogliamo che registri l'altezza del paesaggio al di sopra di ciascun numero immaginario della mappa stesa sul tavolo. Tuttavia è possibile scegliere un'ombra che racchiude informazioni sufficienti a permetterci di comprendere la scoperta di Riemann. È una prospettiva che fu di aiuto a Riemann nel suo viaggio in questo mondo oltre lo specchio. Com'è fatta dunque questa particolare ombra tridimensionale della funzione zeta?

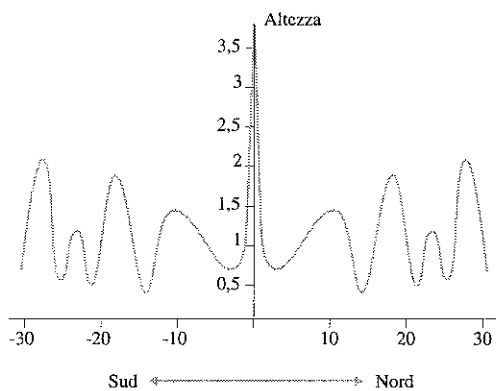


Il paesaggio zeta. Riemann scoprì il modo per completare quest'immagine disegnando un nuovo territorio a est.

Quando Riemann cominciò a esplorare il paesaggio, s'imbatté in vari aspetti fondamentali della sua geografia. Stando dentro il paesaggio zeta e guardando verso est, lo vedeva degradare verso una pianura uniforme che si elevava di un'unità sopra il livello del mare. Se si girava e procedeva verso ovest, vedeva una cresta di alture ondulate che correva da nord a sud. Le cime di queste alture erano tutte situate al di sopra della linea che incrociava l'asse est-ovest in corrispondenza del numero 1. Sopra questo punto d'intersezione c'era un picco torreggiante che saliva in cielo. Era, in effetti, infinitamente alto. Come aveva scoperto

Eulero, quando si inserisce il numero 1 nella funzione zeta si ottiene un risultato che se ne va all'infinito. Dirigendosi a nord o a sud di questa vetta di altezza infinita, Riemann incontrava altri picchi. Nessuno di essi, tuttavia, era di altezza infinita. Il primo picco cadeva a un po' meno di 10 passi verso nord, in corrispondenza del numero immaginario 1 + (9,986...)i, e raggiungeva un'altezza di appena 1,4 unità circa.

Se Riemann avesse ruotato il paesaggio e riportato su un diagramma la sezione trasversale delle colline in corrispondenza di questa linea di divisione nord-sud passante per 1, avrebbe ottenuto qualcosa del genere:



Vista in sezione della catena di montagne che attraversa il paesaggio zeta da nord a sud. Questa sezione trasversale è stata tracciata lungo la linea critica nord-sud definita dal luogo dei punti con coordinata est pari a 1 unità.

Un aspetto cruciale del paesaggio non mancò di attrarre l'attenzione di Riemann. Sembrava che non ci fosse modo di usare la formula che definisce la funzione zeta per costruire il paesaggio a ovest, oltre la catena montuosa. Riemann aveva lo stesso problema che Eulero aveva incontrato inserendo numeri ordinari nella funzione zeta. Ogni volta che si inseriva un numero situato a ovest di 1, la formula che definisce la funzione zeta se ne andava inesorabilmente all'infinito. Eppure in questo paesaggio immaginario, a dispetto del picco che si innalzava all'infinito sopra il numero 1, le altre montagne della catena che correva da nord a sud sembravano percorribili.

Perché allora non procedevano nel loro andamento ondulato, a prescindere dai risultati prodotti dalla funzione zeta? Sicuramente il paesaggio non terminava lì, in corrispondenza di quella linea nord-sud. Possibile che non ci fosse nulla a ovest di quel confine? A dar fede soltanto alle equazioni, si sarebbe pensato che il paesaggio a est di 1 era tutto quello che si poteva costruire. Le equazioni non avevano alcun senso quando vi si inserivano numeri situati a ovest di 1. Riemann sarebbe riuscito a completare il paesaggio? E se sì, come?

Per fortuna Riemann non si lasciò disorientare dall'apparente intrattabilità della funzione zeta. La sua formazione lo aveva munito di una prospettiva che mancava ai matematici francesi. Egli riteneva che l'equazione su cui si fondava un paesaggio immaginario dovesse essere considerata come un aspetto secondario. Di importanza primaria era l'effettiva topografia quadridimensionale del paesaggio. Poteva ben darsi che le equazioni non avessero senso, ma la geometria

del paesaggio suggeriva altrimenti. Riemann riuscì a trovare una formula con cui si poteva costruire il paesaggio mancante a ovest. Quel nuovo paesaggio poteva poi essere saldato in modo perfetto al paesaggio originario. Ora un esploratore del mondo immaginario sarebbe potuto passare tranquillamente dalla regione definita dalla formula di Eulero al paesaggio creato dalla formula di Riemann senza nemmeno accorgersi di attraversare un confine.

A questo punto Riemann aveva a disposizione un paesaggio completo che ricopriva l'intera mappa dei numeri immaginari. Adesso era pronto a fare la mossa successiva. Durante gli studi di dottorato, aveva scoperto due fatti cruciali e impensabili su questi paesaggi immaginari. In primo luogo aveva appreso che possedevano una geometria straordinariamente rigida. C'era un solo modo per espanderli. Ciò che poteva esistere a ovest era completamente determinato dalla geometria del paesaggio di Eulero a est. Riemann non poteva manipolare a proprio piacimento il suo nuovo paesaggio per creare alture ovunque gli andasse di farlo. Qualsiasi modifica avrebbe provocato uno strappo nella cucitura fra i due paesaggi.

La totale rigidità di questi paesaggi immaginari era una scoperta importante. Una volta che un cartografo di mondi immaginari ha tracciato una piccola regione qualsiasi del paesaggio, ciò gli è sufficiente per ricostruire il resto del paesaggio. Riemann aveva scoperto che le alture e le valli presenti in una regione contengono informazioni sulla topografia dell'intero paesaggio. Questo è un fatto certamente

sorprendente. Non ci aspetteremmo che un cartografo di mondi reali, dopo aver tracciato la mappa dei dintorni di Oxford, sia in grado di dedurne il paesaggio completo delle Isole Britanniche.

Ma Riemann aveva fatto una seconda scoperta cruciale su quello strano nuovo tipo di matematica. Aveva scoperto quello che si potrebbe considerare il DNA dei paesaggi immaginari: ogni cartografo matematico che avesse saputo come tracciare sulla mappa immaginaria bidimensionale i punti in cui il paesaggio cadeva al livello del mare avrebbe potuto ricostruire la configurazione dell'intero paesaggio. La mappa che riportava questi punti era la mappa del tesoro di ogni paesaggio immaginario. Era una scoperta sbalorditiva. Un cartografo che vive nel nostro mondo reale non riuscirebbe a ricostruire le Alpi se gli si dicessero tutte le coordinate dei punti del mondo che si trovano al livello del mare. Ma in questi paesaggi immaginari la posizione di tutti i numeri immaginari in cui la funzione va a zero svela ogni cosa. Questi punti sono chiamati gli *zeri* della funzione zeta.

Gli astronomi sono avvezzi a dedurre la composizione chimica di pianeti lontani senza bisogno di visitarli. La luce proveniente da un pianeta può essere analizzata grazie alla spettroscopia e contiene informazioni sufficienti a rivelarne la chimica. Questi zeri si comportano come lo spettro di luce emesso da un composto chimico. Riemann sapeva che la sola cosa che doveva fare era segnare tutti i punti della mappa in cui l'altezza del paesaggio zeta era uguale a zero. Le coordinate di tutti questi punti situati al

livello del mare gli avrebbero dato informazioni sufficienti a ricostruire tutte le alture e gli avvallamenti al di sopra del livello del mare.

Riemann non aveva dimenticato qual era stato il punto di partenza della sua esplorazione. Il big bang che aveva creato quel paesaggio zeta era la formula con cui Eulero aveva definito la funzione zeta, una formula che, grazie al prodotto di Eulero, poteva essere costruita utilizzando solo i numeri primi. E se le due cose – i numeri primi e gli zeri della funzione zeta – producevano lo stesso paesaggio, Riemann sapeva che un qualche nesso doveva legarle. Un unico oggetto costruito in due modi diversi. Fu il genio di Riemann a svelare come quelle due entità fossero due lati della stessa equazione.

Numeri primi e zeri

Il collegamento che Riemann riuscì a trovare fra i numeri primi e i punti situati a livello del mare nel paesaggio zeta non avrebbe potuto essere più diretto. Gauss aveva tentato di stimare quanti fossero i primi compresi fra 1 e un qualsiasi numero N. Ma Riemann, usando le coordinate di quegli zeri, fu in grado di creare una formula che forniva il numero *esatto* dei primi non maggiori di N. La formula escogitata da Riemann aveva due ingredienti chiave. Il primo era una nuova funzione $R(N)$ che serviva a valutare il numero di primi non maggiori di N e che in sostanza forniva

una stima migliore di quella di Gauss. La nuova funzione produceva ancora degli errori, ma i calcoli di Riemann rivelavano che questi errori erano notevolmente più piccoli di quelli prodotti dalla formula di Gauss. Per fare un esempio, il logaritmo integrale di Gauss prediceva l'esistenza di 754 numeri primi in più di quanti ce ne fossero realmente nell'intervallo compreso fra 1 e 100 milioni. La funzione perfezionata introdotta da Riemann ne prediceva soltanto 97 in più, con un errore che era grosso modo pari a un millesimo dell'un per cento.

La tabella seguente evidenzia quanto sia più precisa la nuova funzione di Riemann nella stima del numero di primi non maggiori di N per valori di N che vanno da 10^2 a 10^{16}.

N	Numero di primi $\pi(N)$ compresi fra 1 e N	Sovrastima data dalla funzione di Riemann $R(N)$	Sovrastima data dalla funzione di Gauss $\mathrm{Li}(N)$
10^2	25	1	5
10^3	168	0	10
10^4	1.229	-2	17
10^5	9.592	-5	38
10^6	78.498	29	130
10^7	664.579	88	339
10^8	5.761.455	97	754
10^9	50.847.534	-79	1.701
10^{10}	455.052.511	-1.828	3.104
10^{11}	4.118.054.813	-2.318	11.588

10^{12}	37.607.912.018	-1.476	38.263
10^{13}	346.065.536.839	-5.773	108.971
10^{14}	3.204.941.750.802	-19.200	314.890
10^{15}	29.844.570.422.669	73.218	1.052.619
10^{16}	279.238.341.033.925	327.052	3.214.632

Ma se la nuova funzione di Riemann rappresentava un miglioramento rispetto alla funzione logaritmo di Gauss, produceva comunque degli errori. Tuttavia, l'escursione che Riemann aveva compiuto nel mondo immaginario gli diede accesso a qualcosa che Gauss non si sarebbe mai potuto sognare di ottenere: un metodo per eliminare quegli errori. Riemann comprese che utilizzando i punti della mappa dei numeri immaginari che segnavano i luoghi in cui il paesaggio zeta era al livello del mare, poteva disfarsi di quegli errori e ottenere una formula esatta per il conteggio dei numeri primi. Era questo il secondo ingrediente chiave della sua formula.

Eulero aveva fatto una scoperta sorprendente: se si inseriva un numero immaginario nella funzione esponenziale si otteneva un'onda sinusoidale. La curva in rapida ascesa che normalmente si associa alla funzione esponenziale veniva trasformata dall'introduzione di questi numeri complessi in una curva di andamento sinuoso del tipo solitamente associato alle onde sonore. Questa scoperta diede avvio a una corsa all'esplorazione degli strani nessi portati alla luce dai numeri immaginari. Riemann comprese che era possibile estendere la scoperta di Eulero usando la sua mappa di

punti corrispondenti agli zeri del paesaggio immaginario. In questo mondo oltre lo specchio riuscì a vedere come, usando la funzione zeta, ciascuno di quei punti poteva essere trasformato in una specifica onda. Ogni onda avrebbe avuto l'aspetto di una variazione nel diagramma di una funzione seno.

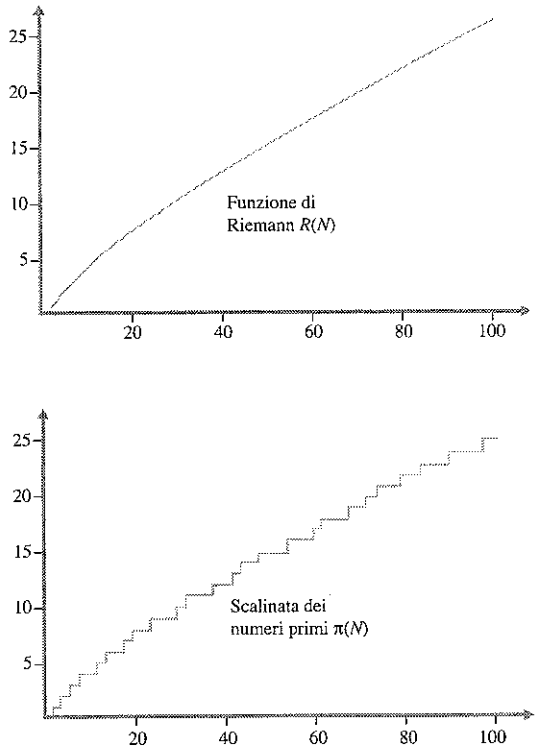
Le caratteristiche di ciascuna onda erano determinate dalla posizione dello zero che ne era responsabile. Tanto più a nord si situava un punto a livello del mare, quanto più rapidamente l'onda corrispondente avrebbe oscillato. Se pensiamo a quest'onda come a un'onda sonora, la nota associata a uno zero risulta tanto più acuta quanto più a nord quello zero si situa nel paesaggio zeta.

Ma perché queste onde – queste note musicali – erano utili per il conteggio dei numeri primi? Riemann fece una scoperta stupefacente: nelle altezze variabili di quelle onde era codificato il modo per correggere gli errori presenti nella sua stima del numero di numeri primi. La funzione $R(N)$ forniva una stima ragionevolmente buona del numero di primi minori o uguali a N. Ma aggiungendo a questa stima l'altezza di ciascuna onda al di sopra del numero N, egli scoprì che poteva ottenere il numero esatto di primi. L'errore era stato eliminato completamente. Riemann era riuscito a dissotterrare il Santo Graal che Gauss aveva cercato invano: una formula esatta per calcolare il numero di primi minori o uguali a N.

L'equazione che esprime questa scoperta può essere riassunta in parole semplicemente come «numeri primi = zeri = onde». Per un matematico, la formula di Riemann che

fornisce il numero di primi in termini di zeri ha un impatto pari a quello dell'equazione di Einstein $E = mc^2$, che rivelò l'esistenza di un legame diretto fra massa ed energia. Proprio come l'equazione di Einstein, questa è una formula di connessioni e trasformazioni. Riemann assistette passo passo alla metamorfosi dei numeri primi. I numeri primi creano il paesaggio zeta, e i punti che in quel paesaggio si trovano a livello del mare sono la chiave per scardinare i suoi segreti. Dopodiché emerge una nuova connessione in base alla quale ognuno di quei punti a livello del mare produce un'onda, una nota musicale. Infine Riemann ritornò al punto di partenza per mostrare come queste onde permettano di contare il numero esatto di numeri primi. Riemann deve essere rimasto strabiliato nel vedere il cerchio chiudersi in maniera tanto spettacolare.

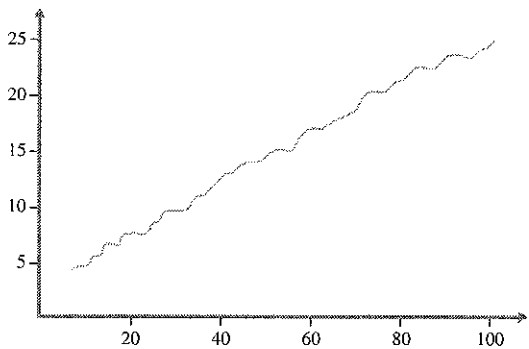
Riemann sapeva che, poiché esistono infiniti numeri primi, esistono infiniti punti che si trovano a livello del mare nel paesaggio zeta. Perciò devono esserci infinite onde che permettono di tenere sotto controllo gli errori. C'è un modo molto vivido per vedere come l'aggiunta di ogni onda supplementare migliori la stima del numero di numeri primi fornita dalla formula di Riemann. Prima dell'aggiunta delle onde corrispondenti agli zeri, il grafico della funzione di Riemann $R(N)$ (riportato alla pagina seguente, in alto) non assomiglia affatto alla scalinata che rappresenta l'effettivo numero di numeri primi (in basso). Nel primo caso si ha una curva uniforme, nel secondo una curva frastagliata.



La sfida: passare dal grafico uniforme della funzione di Riemann, in alto, a quello frastagliato che rappresenta il vero numero di numeri primi, in basso.

È sufficiente tener conto degli errori previsti dalle trenta onde create dai primi trenta zeri che incontriamo quando ci

dirigiamo a nord nel paesaggio zeta per produrre un effetto evidentissimo. Il grafico di Riemann appare trasformato rispetto alla curva uniforme corrispondente a $R(N)$ ed è molto più simile alla scalinata che descrive il numero effettivo di numeri primi:



L'effetto che si ottiene aggiungendo le prime trenta onde al grafico uniforme di Riemann.

Ogni nuova onda rende un poco più contorta la curva perfettamente uniforme da cui si è partiti. Riemann comprese che qualora vi avesse aggiunto tutte le infinite onde, una per ogni punto a livello del mare che incontrava mentre proseguiva verso nord nel paesaggio zeta, la curva si sarebbe sovrapposta esattamente alla scalinata dei numeri primi.

Una generazione prima, Gauss aveva scoperto quella che riteneva fosse la moneta lanciata dalla Natura per sce-

gliere i numeri primi. Le onde scoperte da Riemann erano i risultati effettivi dei lanci fatti dalla Natura. Le altezze di ognuna di quelle onde in corrispondenza del numero N predicevano per ogni lancio se la moneta dei numeri primi avrebbe dato testa o croce. Se la scoperta del legame fra numeri primi e logaritmi compiuta da Gauss aveva permesso di prevedere il comportamento medio dei numeri primi, Riemann aveva individuato ciò che controllava quel comportamento nei minimi dettagli. Aveva trovato un elenco completo dei biglietti vincenti della lotteria dei numeri primi.

La musica dei numeri primi

Da secoli i matematici ascoltavano i numeri primi senza sentire altro che un rumore disorganizzato. Quei numeri erano come note disseminate completamente a caso sul pentagramma, in una confusione da cui non emergeva alcuna melodia riconoscibile. Ora Riemann aveva trovato delle nuove orecchie con cui ascoltare quei toni misteriosi. Le onde sinusoidali che egli aveva creato usando gli zeri del suo paesaggio zeta rivelavano l'esistenza di una struttura armonica nascosta.

Percuotendo un'urna, Pitagora aveva svelato l'armonia musicale celata in una sequenza di frazioni. Mersenne ed Eulero, due grandi esperti dei numeri primi, avevano creato la teoria degli armonici. Ma nessuno di loro ebbe il sospetto

che ci fossero legami diretti fra musica e numeri primi. Quella dei numeri primi era una melodia che aveva bisogno di orecchie matematiche del XIX secolo per poter essere colta. Il mondo immaginario di Riemann aveva generato semplici onde che insieme potevano riprodurre le sottili armonie dei numeri primi.

Un matematico sarebbe riuscito a comprendere meglio di tutti gli altri come la formula di Riemann catturasse la musica nascosta dei numeri primi: Joseph Fourier. Orfano, Fourier era stato educato in una scuola militare retta da monaci benedettini. Fu un ragazzo indisciplinato fino a tredici anni, quando subì l'incanto della matematica. Fourier era destinato a diventare un monaco, ma gli eventi del 1789 lo liberarono dalle prospettive che il periodo prerivoluzionario gli aveva assegnato. Adesso poteva abbandonarsi alla sua passione per la matematica e per la vita militare.

Fourier fu un sostenitore entusiasta della Rivoluzione e presto attrasse l'attenzione di Napoleone. Il futuro imperatore stava istituendo le accademie da cui dovevano uscire gli insegnanti e gli ingegneri che avrebbero dato vita alla sua rivoluzione culturale e militare. Riconoscendo le capacità eccezionali di Fourier non solo come matematico ma anche come insegnante, Napoleone lo nominò docente di matematica all'École Polytechnique.

Napoleone rimase così impressionato dai risultati ottenuti dal suo protetto che lo volle nella legione di scienziati e artisti che fu aggregata alle truppe d'invasione dell'Egitto del 1798 allo scopo di «civilizzarlo». A spingere Napoleone

a quella spedizione era il desiderio di porre fine alla crescente supremazia coloniale inglese, ma nel suo programma rientrava anche l'opportunità di studiare il mondo antico. Il suo esercito di intellettuali doveva mettersi all'opera non appena si fosse imbarcato sull'*Orient*, la nave ammiraglia di Napoleone diretta verso le coste settentrionali dell'Africa. Ogni mattina Napoleone annunciava il tema sul quale si aspettava che i suoi ambasciatori accademici l'avrebbero intrattenuto la sera. Mentre i marinai sfacchinavano con il sartiame e le vele, sottocoperta Fourier e i suoi colleghi si cimentavano con un assortimento degli argomenti preferiti da Napoleone, dall'età della Terra alla possibilità che altri pianeti fossero abitati.

All'arrivo in Egitto non tutto andò secondo i piani. Dopo che ebbe conquistato il Cairo con la forza vincendo la battaglia delle Piramidi nel luglio del 1798, fu una delusione per Napoleone scoprire che gli egiziani non sembravano apprezzare l'alimentazione culturale forzata che veniva somministrata loro da persone del calibro di Joseph Fourier. Quando, una sera, a trecento dei suoi uomini fu tagliata la gola durante una rissa, Napoleone decise di ridurre le perdite e di ritornare a occuparsi dei tumulti che covavano a Parigi. Salpò senza dire a nessun componente del suo esercito di intellettuali che li stava abbandonando. Fourier, rimasto insabbiato al Cairo, non aveva un rango sufficiente per alzare i tacchi senza rischiare di essere fucilato come disertore e fu perciò costretto a fermarsi nel deserto. Riuscì a fare ritorno in Francia nel 1801, dopo che i

francesi avevano deciso di lasciare agli inglesi il compito di «civilizzare» l'Egitto.

In Egitto Fourier acquisì una vera mania per il calore bruciante del deserto. A Parigi teneva la temperatura dei suoi locali così alta che gli amici li paragonavano alle fornaci dell'inferno. Riteneva che un calore estremo contribuisse a mantenere il corpo sano e che potesse persino curare alcune malattie. I suoi amici lo trovavano coperto come una mummia egiziana che sudava in una stanza bollente come il Sahara.

La predilezione di Fourier per il calore si estendeva al suo lavoro accademico. Conquistò il proprio posto nella storia della matematica per la sua analisi della propagazione del calore, un'opera che il fisico inglese Lord Kelvin definì «un grande poema matematico». Fourier aveva moltiplicato i suoi sforzi dopo che l'Accademia di Parigi aveva annunciato che avrebbe conferito il Grand Prix des Mathématiques del 1812 a chiunque avesse svelato i misteri della propagazione del calore nella materia. Fourier ricevette il premio in riconoscimento della novità e dell'importanza delle sue idee. Ma dovette anche ingoiare alcune critiche, mossegli, fra gli altri, da Legendre. I giudici del Grand Prix fecero notare che una buona parte del suo trattato conteneva degli errori e che la sua spiegazione matematica era tutt'altro che rigorosa. Fourier si risentì profondamente delle critiche dell'Accademia ma riconobbe che c'era ancora del lavoro da fare.

Mentre si disponeva a correggere gli errori nella sua ana-

lisi, Fourier cercò di comprendere la natura dei grafici che davano una rappresentazione dei fenomeni fisici, per esempio il grafico che mostrava come la temperatura varia nel tempo, oppure il grafico che riproduceva un'onda sonora. Sapeva che è possibile rappresentare il suono per mezzo di un diagramma in cui l'asse orizzontale riporta il tempo e l'asse verticale dà conto dell'intensità e dell'altezza del suono in ogni istante.

Fourier partì da un diagramma del suono più semplice che esista. Se si fa vibrare un diapason, quando si traccia il grafico dell'onda sonora risultante si scopre che è un'onda sinusoidale perfetta, pura. Fourier cominciò a studiare come si potessero costruire onde più complicate combinando queste onde sinusoidali pure. Se un violino suona la stessa nota di un diapason, il suono che produce è però molto diverso. Come abbiamo visto (p. 145), la corda di un violino non vibra soltanto alla frequenza fondamentale, determinata dalla sua lunghezza. Insieme a quella nota ce ne sono altre, le armoniche, che corrispondono a semplici frazioni della lunghezza della corda. I grafici di ognuna di queste note aggiuntive sono anch'esse onde sinusoidali, ma di frequenze più alte. È una combinazione di tutte queste note pure, dominata dalla nota fondamentale, la più bassa, che crea il suono emesso da una corda di violino. Il grafico di questo suono composto assomiglia ai denti di una sega.

Perché un clarinetto emette un suono così peculiarmente diverso da quello di un violino che suona la mede-

sima nota? Il grafico dell'onda sonora creata dal clarinetto non assomiglia per nulla a quello spigoloso del violino, ma a un'onda quadra, al profilo della merlatura sulle pareti di un castello. Il motivo della differenza è che il clarinetto è aperto a un'estremità, mentre la corda del violino è fissata a entrambe le estremità. Ciò significa che le armoniche prodotte dal clarinetto sono diverse da quelle del violino, e perciò il grafico che riproduce il suono del clarinetto è costituito da onde sinusoidali che oscillano a frequenze differenti.

Fourier capì che persino il grafico complicato che rappresenta il suono di un'intera orchestra poteva essere scomposto nelle semplici curve sinusoidali delle fondamentali e delle armoniche di ogni singolo strumento. Poiché ognuna delle onde sonore pure può essere riprodotta da un diapason, Fourier aveva dimostrato che suonando un numero enorme di diapason simultaneamente è possibile creare il suono di un'orchestra al gran completo. Una persona bendata non sarebbe in grado di dire se sta ascoltando una vera orchestra o migliaia di diapason. Su questo principio si basa il modo in cui i suoni sono codificato su un CD: il CD invia istruzioni ai vostri altoparlanti su come vibrare per creare tutte le onde sinusoidali che compongono la musica. Questa combinazione di onde sinusoidali vi dà la sensazione miracolosa di avere un'orchestra o un complesso che suonano dal vivo nel vostro salotto.

Ma non era solo il suono degli strumenti musicali che si poteva riprodurre sommando fra loro onde sinusoidali pure

di frequenze differenti. Per esempio, il rumore bianco emesso da una radio non sintonizzata o da un rubinetto aperto può essere rappresentato come una somma infinita di onde sinusoidali. Al contrario delle frequenze ben distinte necessarie per riprodurre il suono di un'orchestra, il rumore bianco è composto da una gamma continua di frequenze.

Le intuizioni rivoluzionarie di Fourier non si limitavano alla riproduzione dei suoni. Egli cominciò a capire come fosse possibile usare le onde sinusoidali per tracciare grafici che fornivano una rappresentazione di altri fenomeni fisici e matematici. Molti fra i contemporanei di Fourier dubitavano del fatto che una curva semplice qual è l'onda sinusoidale potesse essere utilizzata come elemento di base per costruire i grafici complicati del suono di un'orchestra o di un rubinetto aperto. In effetti, alcuni autorevoli matematici francesi espressero la loro vigorosa opposizione alle idee di Fourier. Tuttavia, incoraggiato dai suoi prestigiosi rapporti con Napoleone, Fourier non si sottrasse alla sfida con quelle autorità. Mostrò come con una scelta appropriata di onde sinusoidali oscillanti a frequenze diverse si potesse creare un'intera gamma di grafici complicati. Sommando le altezze delle onde sinusoidali era possibile riprodurre le forme di questi grafici, proprio nello stesso modo in cui un CD combina le note pure emesse dai diapason per ricreare suoni musicali complessi.

È precisamente questo che Riemann riuscì a fare in quel suo saggio di dieci pagine. Egli riprodusse il grafico a scalini che dava conto del numero di numeri primi utilizzando

una tecnica identica: sommò fra loro le altezze delle funzioni d'onda che aveva derivato dagli zeri del paesaggio zeta. Ecco perché Fourier avrebbe riconosciuto nella formula di Riemann per calcolare il numero di primi la scoperta delle note di base che compongono il suono dei numeri primi. Le onde che Riemann aveva creato dagli zeri, dai punti situati a livello del mare nel paesaggio, erano come suoni emessi da diapason, singole note limpide, senza armoniche. Quando le si suonava simultaneamente queste note di base riproducevano il suono dei numeri primi. Ma com'è la musica dei numeri primi composta da Riemann? È il suono di un'orchestra oppure assomiglia al rumore bianco di un rubinetto aperto? Se le frequenze delle note di Riemann coprono una gamma continua, allora i numeri primi producono rumore bianco. Ma se le frequenze sono note isolate, allora il suono dei numeri primi assomiglia alla musica di un'orchestra.

Data la casualità dei numeri primi, è del tutto lecito aspettarsi che la combinazione delle note suonate dagli zeri del paesaggio di Riemann non sia null'altro che rumore. La coordinata nord-sud di ciascuno zero determina l'altezza della nota corrispondente. Se il suono dei numeri primi fosse effettivamente rumore bianco, nel paesaggio zeta dovrebbe esserci una concentrazione di zeri. E Riemann sapeva, dalla dissertazione che aveva scritto per Gauss, che una tale concentrazione di punti a livello del mare avrebbe comportato necessariamente che *l'intero* paesaggio fosse a livello del mare. Evidentemente non era così. Il suono dei

numeri primi non era affatto rumore bianco. I punti situati a livello del mare dovevano essere punti isolati, e perciò dovevano produrre un'insieme di note isolate. La Natura aveva nascosto nei numeri primi la musica di un'orchestra matematica.

L'ipotesi di Riemann: ordine dal caos

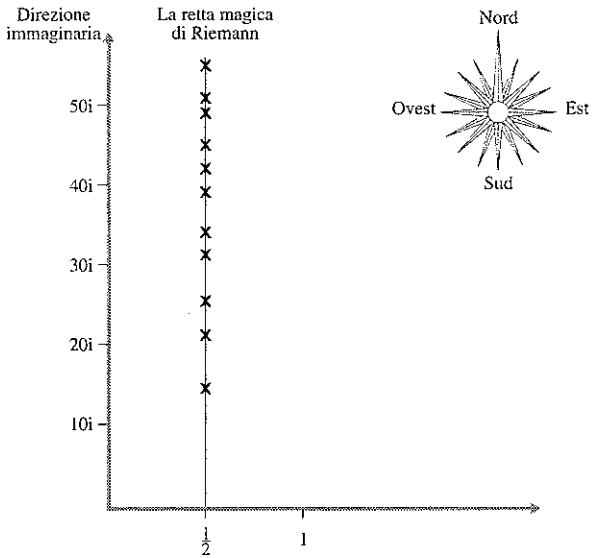
Quello che Riemann aveva fatto era stato prendere ciascuno dei punti situati a livello del mare sulla mappa del mondo immaginario. Da ciascun punto aveva creato un'onda, una nota emessa da un qualche strumento matematico. Combinando tutte queste onde, ottenne un'orchestra che suonava la musica dei numeri primi. La coordinata nord-sud di ogni punto a livello del mare controllava la frequenza dell'onda, ovvero l'altezza della nota corrispondente. Al contrario, la coordinata est-ovest controllava, come aveva compreso Eulero, l'intensità alla quale ciascuna nota sarebbe stata suonata. Tanto maggiore era l'intensità della nota, quanto più grandi erano le fluttuazioni del suo grafico ondulato.

A Riemann interessava capire se qualcuno degli zeri suonasse con un'intensità significativamente maggiore rispetto agli altri. Un tale zero avrebbe prodotto un'onda il cui grafico avrebbe oscillato più delle altre onde e quindi avrebbe avuto un ruolo maggiore nel conteggio dei numeri primi. Dopo tutto, sono le altezze di queste onde che controllano la

differenza fra la stima di Gauss e il vero numero di numeri primi. C'era uno strumento di questa orchestra di numeri primi che suonava un assolo sovrastando gli altri strumenti? Tanto più a est si situava un punto a livello del mare, quanto più intensa sarebbe stata la nota. Per determinare il bilanciamento dell'orchestra, Riemann doveva tornare indietro e osservare le coordinate di ciascuno degli zeri nella sua mappa immaginaria.

Bisogna notare che fino a quel momento la sua analisi era proceduta senza che lui avesse avuto bisogno di conoscere le posizioni di uno solo dei punti a livello del mare. Sapeva che alcuni degli zeri che si protendevano a ovest erano facili da individuare, ma che non davano alcun contributo interessante al suono dei numeri primi perché non avevano un tono. Nel loro tipico stile sprezzante, in seguito i matematici li avrebbero chiamati zeri banali. Era alla posizione degli zeri rimanenti che Riemann dava la caccia.

Quando cominciò ad analizzare l'esatta collocazione di questi punti, ebbe una grossa sorpresa. Invece di essere sparpagliati qua e là su tutta la mappa, di modo che alcune note sarebbero risultate più intense di altre, gli zeri che calcolava sembravano disporsi come per miracolo su una linea retta che attraversa il paesaggio nella direzione nord-sud. Era come se ogni punto situato a livello del mare avesse la stessa coordinata est-ovest, uguale a $\frac{1}{2}$. Se fosse stato vero, significava che le onde corrispondenti erano perfettamente equilibrate, che nessuna produceva una nota più intensa delle altre.



La mappa del tesoro dei numeri primi scoperta da Riemann. Le crocette indicano le posizioni dei punti che si trovano a livello del mare nel paesaggio zeta.

Il primo zero che Riemann calcolò aveva coordinate ($\frac{1}{2}$; 14,134 725...): $\frac{1}{2}$ passo a est e circa 14,134 725 passi a nord. Lo zero successivo aveva coordinate ($\frac{1}{2}$; 21,022 040...). (Come riuscì a calcolare la posizione di ciascuno di questi zeri rimase un mistero per anni.) Calcolò un terzo zero che era situato a ($\frac{1}{2}$, 25,010 856...). Questi zeri non sembravano af-

fatto sparpagliati a caso. I calcoli di Riemann indicavano che erano allineati, come se giacessero lungo una retta magica che attraversava il paesaggio. Riemann ipotizzò che il comportamento irreggimentato dei pochi zeri che era riuscito a calcolare non fosse frutto di una coincidenza. È quest'idea secondo cui ogni punto situato a livello del mare nel paesaggio si sarebbe trovato su quella retta che ha preso il nome di *ipotesi di Riemann*.

Riemann guardò l'immagine dei numeri primi nello specchio che separava il mondo dei numeri dal suo paesaggio zeta. Mentre osservava, vide la disposizione caotica dei numeri primi da un lato dello specchio trasformarsi nell'ordine assolutamente rigido degli zeri dall'altro lato dello specchio. Riemann aveva finalmente individuato la misteriosa struttura che per secoli e secoli i matematici avevano desiderato ardentemente di scorgere mentre osservavano i numeri primi.

La scoperta di quella struttura regolare fu del tutto inaspettata. Riemann ebbe la fortuna di essere la persona giusta nel posto giusto al momento giusto: non avrebbe potuto prevedere ciò che lo attendeva dall'altro lato dello specchio. Ma quello che vi si trovava trasformò completamente l'impresa di comprendere i misteri dei numeri primi. Ora i matematici avevano un nuovo paesaggio da esplorare. Se fossero riusciti a orientarsi nel territorio della funzione zeta e a costruire un diagramma dei luoghi situati a livello del mare, i numeri primi avrebbero ancora potuto cedere i loro segreti. Un'altra cosa che Riemann aveva scoperto era la traccia dell'esistenza di una retta magica che attraversa questo paesag-

gio e la cui portata conduce diritti al cuore della matematica. L'importanza della retta magica di Riemann si può giudicare dal nome che oggi i matematici le danno: *la linea critica*. Di colpo, l'enigma della casualità dei numeri primi nel mondo reale è stato sostituito dal tentativo di comprendere l'armonia di questo paesaggio immaginario oltre lo specchio.

Dato che ci sono infiniti numeri primi, i pochi frammenti di prove che Riemann aveva scoperto sembravano piuttosto precari come fatti concreti su cui basare una teoria. Malgrado ciò, Riemann sapeva che quella retta magica aveva un significato importante. Già era a conoscenza del fatto che l'asse est-ovest rappresentasse una linea di simmetria nel paesaggio zeta. Tutto ciò che accadeva a nord di quell'asse sarebbe stato rispecchiato da un comportamento identico a sud. Ma Riemann aveva fatto una scoperta di portata molto maggiore: anche la sua retta magica – la linea nord-sud che passa per il punto $\frac{1}{2}$ – era un'importante linea di simmetria. È plausibile che ciò abbia fornito a Riemann una ragione per credere che la Natura avesse utilizzato questa linea di simmetria anche per ordinare gli zeri.

Quello che è tanto straordinario riguardo agli eventi che circondano l'importantissima scoperta di Riemann, è che i suoi calcoli delle posizioni di quei pochi zeri iniziali non comparivano da nessuna parte nel fitto saggio sui numeri primi che scrisse per l'Accademia di Berlino. Di fatto, si ha difficoltà a individuare un qualsiasi accenno esplicito alla scoperta nella versione del saggio che fu pubblicata. Egli scrive soltanto che molti degli zeri fanno la loro comparsa su

quella linea retta, e che è «assai probabile» che lo stesso valga per tutti gli zeri. Ma nel saggio ammette di non essersi sforzato di dimostrare la sua ipotesi più di tanto.

Dopo tutto, Riemann inseguiva lo scopo molto più immediato di dimostrare la congettura di Gauss sui numeri primi, cioè di spiegare perché la stima dei numeri primi data da Gauss diventava sempre più precisa man mano che si contava un numero maggiore di primi. Nonostante anche questa dimostrazione gli fosse sfuggita, Riemann comprese che se la sua intuizione sulla retta magica fosse stata vera, allora se ne sarebbe dedotto che Gauss aveva avuto ragione. Come Riemann aveva scoperto, era possibile descrivere gli errori presenti nella formula di Gauss per mezzo della posizione di ciascuno zero. Tanto più uno zero era situato a est, quanto maggiore era l'intensità dell'onda. Tanto maggiore l'intensità dell'onda, quanto più grande l'errore. È per questo che la predizione di Riemann sulla posizione degli zeri era così importante per la matematica. Se aveva ragione, e se tutti gli zeri cadevano sulla sua retta magica, significava che la stima di Gauss si sarebbe mantenuta sempre incredibilmente precisa.

La pubblicazione di quel saggio di dieci pagine segnò un breve periodo di felicità nella vita di Riemann. Ebbe l'onore di vedersi assegnare la cattedra che entrambi i suoi mentori, Gauss e Dirichlet, avevano occupato. Sua sorella lo aveva raggiunto a Gottinga dopo che il fratello, da cui riceveva un sostegno finanziario, era morto nel 1857. La vicinanza della famiglia sollevò il morale di Riemann, ed egli fu meno soggetto alle crisi di depressione di cui aveva sofferto negli anni

precedenti. Grazie allo stipendio da professore non dovette più sopportare l'indigenza del periodo in cui era studente. E finalmente poté permettersi sistemazioni decorose e persino una governante, di modo che era libero di dedicare il proprio tempo a inseguire le idee che gli danzavano nella testa.

Tuttavia non sarebbe più tornato a occuparsi di numeri primi. Continuò a seguire il suo intuito geometrico ed elaborò un concetto di geometria dello spazio che era destinato a diventare una delle pietre angolari della teoria della relatività di Einstein. Quel periodo fortunato culminò nel matrimonio con Elise Koch, un'amica di sua sorella. Ma appena un mese dopo Riemann si ammalò di pleurite. Da quel momento in avanti la cattiva salute non gli avrebbe più dato tregua. In molte occasioni cercò rifugio nella campagna italiana. Si affezionò in modo particolare a Pisa, la città dove nacque il suo unico figlio, una bambina di nome Ida. Riemann traeva piacere da quei viaggi in Italia non solo per il clima mite, ma anche per la vivacità intellettuale che vi trovava: nel corso della sua vita la comunità matematica italiana fu la più aperta alle sue idee rivoluzionarie.

La sua ultima visita in Italia non fu una fuga dal clima umido della Germania ma da un esercito invasore. Nel 1866 gli eserciti d'Hannover e di Prussia si scontrarono a Gottinga. Riemann si trovò bloccato nei locali in cui allora alloggiava, nel vecchio osservatorio di Gauss, fuori delle mura cittadine. A giudicare dallo stato in cui li lasciò, Riemann dovette partire in fretta e furia per l'Italia. Quello shock si rivelò eccessivo per la sua fragile costituzione. Sette anni dopo

la pubblicazione del saggio sui numeri primi, Riemann morì di consunzione. Aveva solo trentanove anni.

Trovatasi a dover affrontare il disordine lasciato da Riemann, la sua governante distrusse molti dei suoi appunti inediti, prima che alcuni membri della facoltà di Gottinga la fermassero. Le carte sopravvissute furono consegnate alla vedova di Riemann e sparirono per anni. È difficile resistere alla tentazione di azzardare ipotesi su che cosa si sarebbe potuto trovare se la governante di Riemann non fosse stata così ansiosa di mettere in ordine il suo studio. Un'affermazione fatta da Riemann nel suo saggio di dieci pagine indica che egli riteneva di poter dimostrare che la maggior parte degli zeri si trovano sulla sua retta magica. Il perfezionismo gli impedì di sviluppare l'argomento, ed egli si limitò a scrivere che la dimostrazione non era ancora pronta per essere pubblicata. Fra le sue carte inedite quella dimostrazione non fu mai trovata, e fino a oggi i matematici non sono stati in grado di replicarla. Quelle pagine mancanti di Riemann intrigano quanto la nota in cui Fermat affermò di possedere una dimostrazione del suo ultimo teorema.

Alcuni appunti inediti che sopravissero al fuoco della governante ricomparvero cinquant'anni dopo. La cosa frustrante è che da essi si deduce che Riemann aveva effettivamente dimostrato molto più di quanto non avesse pubblicato. Purtroppo, però, molte delle carte in cui erano descritti nei dettagli i risultati che Riemann lasciava intendere di aver compreso almeno in parte sono probabilmente andate perdute per sempre nel caminetto della cucina di una governante troppo solerte.

5

La corsa matematica a staffetta: parte la rivoluzione riemanniana

Un problema di teoria dei numeri è senza tempo come un'opera d'arte.

David Hilbert, Introduzione a *The Elements of the Theory of Algebraic Numbers*, di Legh Wilber Reid

Euclide ad Alessandria. Eulero a San Pietroburgo. Il trio di Gottinga: Gauss, Dirichlet, Riemann. Il problema dei numeri primi era passato come un testimone di generazione in generazione. In questa corsa a staffetta, le inedite prospettive aperte da ciascuna generazione avevano fornito l'impulso per un rinnovato slancio. Ogni ondata di matematici aveva lasciato il proprio marchio caratteristico sui numeri primi, specchio della particolare visione culturale dell'epoca sulla matematica. Tuttavia, i contributi di Riemann lo portarono così avanti nel campo che ci vollero quasi trent'anni prima che qualcuno fosse nella condizione di mettere a profitto quel torrente impetuoso di nuove idee.

Poi, nel 1885, di punto in bianco sembrò che i giochi fos-

sero fatti. Anche se meno velocemente di quanto sarebbe accaduto oltre un secolo dopo con il pesce d'aprile diffuso per e-mail da Bombieri, cominciò a circolare una notizia sensazionale: un personaggio poco noto non solo aveva raccolto il testimone di Riemann ma aveva tagliato la linea del traguardo. Un matematico olandese, Thomas Stieltjes, si gloriava di essere in possesso di una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann, una dimostrazione che confermava che tutti gli zeri giacevano sulla retta magica di Riemann passante per $\frac{1}{2}$.

Stieltjes era un trionfatore poco credibile. Da studente era stato bocciato tre volte agli esami universitari, per la disperazione del padre, che era un membro del parlamento olandese e un eminente ingegnere a cui era stata affidata la costruzione degli impianti portuali di Rotterdam. Ma i fallimenti di Thomas non erano dovuti a pigrizia. A distrarlo era semplicemente il piacere di leggere autentica matematica nella biblioteca di Delft invece di studiare in fretta e furia gli esercizi tecnici richiesti per gli esami.

Uno dei suoi autori preferiti era Gauss, di cui era ansioso di calcare le orme. E proprio come Gauss aveva lavorato all'osservatorio di Gottinga, Stieltjes accettò un impiego presso l'osservatorio di Leida. Quel posto era saltato fuori come per magia grazie a una buona parola del suo influente padre al direttore dell'osservatorio, ma Stieltjes non venne mai a conoscenza di quell'aiuto. Ogni volta che puntava il suo telescopio nel cielo, a catturare la sua immaginazione non era la possibilità di misurare le posizioni di nuove stelle ma la matematica dei moti celesti. Quando le sue idee germoglia-

rono, decise di scrivere a uno degli eminenti matematici delle famose accademie francesi, Charles Hermite.

Hermite era nato nel 1822, quattro anni prima di Riemann. Ora, ormai sessantenne, era diventato uno degli alfieri dell'opera di Cauchy e Riemann sulle funzioni di numeri immaginari. L'influenza che Cauchy aveva avuto su di lui non si limitava alla matematica. Da giovane Hermite era stato un agnostico, ma Cauchy, cattolico devoto, aveva approfittato di un suo momento di debolezza durante una grave malattia per convertirlo al cattolicesimo. Il risultato fu una strana miscela di misticismo matematico simile al culto dei pitagorici. Hermite credeva che l'esistenza matematica fosse una sorta di stato soprannaturale a cui solo occasionalmente i matematici mortali potevano volgere delle occhiate fuggevoli.

Forse è per questo che rispose con tanto entusiasmo alla lettera speditagli da un oscuro assistente dell'osservatorio di Leida: doveva essersi persuaso che guardando le stelle quell'astronomo avesse ricevuto il dono di una visione matematica intensificata. Presto i due si trovarono coinvolti in un'impetuosa corrispondenza matematica che in un periodo di dodici anni vide lo scambio di 432 lettere. Hermite era impressionato dalle idee matematiche del giovane olandese, e benché Stieltjes non avesse una laurea, gli diede il suo sostegno e fece in modo che venisse ricompensato con una cattedra all'università di Tolosa. In una lettera a Stieltjes, a proposito del suo lavoro Hermite scriveva: «Vous avez toujours raison et j'ai toujours tort». («Voi avete sempre ragione e io sempre torto.»)

Fu nel periodo in cui intratteneva questa corrispondenza che Stieltjes fece la straordinaria affermazione di aver dimostrato l'ipotesi di Riemann. La fiducia di Hermite nel suo giovane *protégé* non gli diede motivo di dubitare che Stieltjes fosse effettivamente riuscito a concepire una dimostrazione. Dopo tutto, aveva già dato grandi contributi in altre branche della matematica.

Siccome la congettura di Riemann non aveva avuto il tempo di assumere i contorni della sfida apparentemente difficilissima che rappresenta ai nostri giorni, l'annuncio di Stieltjes fu salutato con un entusiasmo minore di quello che avrebbe suscitato se fosse stato fatto oggi. Riemann non aveva strombazzato la propria intuizione sugli zeri, l'aveva anzi sepolta ben bene nel suo saggio di dieci pagine, senza fornire molti indizi che la supportassero. Ci sarebbe voluta una nuova generazione per afferrare appieno l'importanza dell'ipotesi di Riemann. Nondimeno, l'annuncio di Stieltjes era eccitante, dato che dimostrare l'ipotesi di Riemann avrebbe significato dimostrare anche la congettura di Gauss sui numeri primi, che a quel tempo era il Santo Graal della teoria dei numeri. Per $N = 1.000.000$, la stima del numero di numeri primi data dal logaritmo integrale $\mathrm{Li}(N)$ di Gauss produceva un errore dello 0,17 per cento. Quando si giunse a contare il numero di primi compresi tra 1 e 1.000.000.000, si scoprì che l'errore era sceso allo 0,003 per cento. Gauss ipotizzava che l'errore percentuale si sarebbe ridotto sempre più man mano che si fossero considerati valori sempre più grandi di N. Verso la fine dell'Ottocento, la congettura di

Gauss era in circolazione da un tempo sufficiente perché al suo potenziale conquistatore fossero tributati grandi onori. Gli indizi a sostegno dell'intuizione di Gauss erano certamente convincenti.

All'epoca in cui Stieltjes scrisse a Hermite della sua dimostrazione, il maggior progresso sulla strada di una conferma della congettura di Gauss era stato compiuto negli anni Cinquanta del secolo nel vecchio e amato rifugio di Eulero: San Pietroburgo. Il matematico russo Pafnutij Čebyšev, pur non essendo riuscito a provare che la differenza percentuale fra la stima di Gauss e il vero numero di numeri primi diventa sempre più piccola, aveva dimostrato che l'errore sul numero di primi minori o uguali a N non avrebbe mai superato l'undici per cento, per quanto grande si fosse scelto N. L'undici per cento può sembrare lontano mille miglia dallo 0,003 per cento ottenuto da Gauss per il numero di primi compresi fra uno e un miliardo, ma l'importanza del risultato di Čebyšev stava nel fatto di garantire con certezza assoluta che, per quanto si proseguisse nel conteggio dei numeri primi, l'errore non sarebbe mai potuto diventare enorme. In precedenza, la congettura di Gauss si era basata esclusivamente su una piccola quantità di indizi sperimentali. L'analisi teorica di Čebyšev fornì il primo sostegno autentico all'ipotesi dell'esistenza di un legame fra logaritmi e numeri primi. Tuttavia, restava ancora molta strada da percorrere per arrivare a dimostrare che quel legame si sarebbe mantenuto tanto stretto quanto Gauss aveva ipotizzato.

Čebyšev riuscì a ottenere questo controllo sull'errore usando metodi assolutamente elementari. Riemann, che a Gottinga stava sgobbando sul suo sofisticato paesaggio immaginario, venne a conoscenza del lavoro di Čebyšev. Ci sono le tracce di una lettera che aveva preparato con l'intenzione di spedirla a Čebyšev e in cui esponeva per sommi capi i propri progressi; fra le carte di Riemann che sono sopravvissute si trovano varie minute in cui egli prova grafie differenti del nome del suo collega russo. Non è chiaro se alla fine Riemann abbia effettivamente spedito la lettera a Čebyšev. Ma, che l'abbia ricevuta o meno, Čebyšev non riuscì a migliorare la sua stima dell'errore nel conteggio dei numeri primi.

È per questo che l'annuncio di Stieltjes suscitò comunque un notevole entusiasmo fra i matematici dell'epoca. Nessuno sospettava ancora quanto sarebbe stato difficile dimostrare l'ipotesi di Riemann, ma una dimostrazione della congettura di Gauss era un successo riconosciuto. Hermite era ansioso di vedere i dettagli della dimostrazione di Stieltjes, ma il giovane matematico era molto reticente. La dimostrazione non era pronta. Nonostante i continui pungoli, nei cinque anni successivi Stieltjes non produsse nulla a sostegno della sua affermazione. Per tentare di reagire al senso di frustrazione crescente che provava di fronte alla riluttanza di Stieltjes a esporre le proprie idee, Hermite escogitò ciò che pensava fosse un espediente ingegnoso per costringerlo a venire allo scoperto. Propose che l'Accademia di Parigi dedicasse il Grand Prix des Sciences

Mathématiques del 1890 alla dimostrazione della congettura di Gauss sui numeri primi. Hermite si mise tranquillamente in attesa, fiducioso del fatto che il premio sarebbe andato al suo amico Stieltjes.

Ecco qual era il piano di Hermite: per aggiudicarsi il premio non era necessario che Stieltjes rivendicasse nulla di così grandioso come l'aver dimostrato l'ipotesi di Riemann. Gli sarebbe bastato tracciare la mappa di una piccola porzione del paesaggio immaginario: il confine fra il paesaggio di Eulero e l'estensione di Riemann. Era sufficiente dimostrare che non c'erano zeri su quel confine, cioè sulla linea retta che corre da nord a sud passando per il numero 1. Il paesaggio di Riemann poteva allora essere usato per stimare gli errori nella formula di Gauss, errori che erano determinati da quanto a est cadesse ciascuno degli zeri nel paesaggio di Riemann. Tanto più a est fosse caduto uno zero, quanto maggiore sarebbe stato l'errore corrispondente. Se l'ipotesi di Riemann fosse stata corretta, l'errore sarebbe stato molto piccolo, ma la congettura di Gauss avrebbe continuato a essere vera anche se l'ipotesi di Riemann fosse stata falsa, sempre che tutti gli zeri cadessero senza eccezione a ovest del confine nord-sud passante per il numero 1.

La scadenza per concorrere al premio passò senza che Stieltjes si facesse vivo. Ma Hermite non era destinato a rimanere del tutto deluso. Inaspettatamente, il suo studente Jacques Hadamard presentò un saggio. Anche se Hadamard non fornì una dimostrazione completa, le sue idee furono

sufficienti a fargli vincere il premio. Spronato da quel successo, nel 1896 Hadamard riuscì a colmare le lacune nelle proprie argomentazioni. Non era in grado di provare che tutti gli zeri si trovavano sulla retta critica di Riemann passante per $\frac{1}{2}$, ma poteva dimostrare che nessuno zero cadeva tanto a est quanto il confine passante per 1.

Un secolo dopo che Gauss aveva scoperto un collegamento fra numeri primi e funzione logaritmo, la matematica era finalmente in possesso di una dimostrazione della congettura di Gauss sui numeri primi. Non più congettura, da allora in poi prese il nome di teorema dei numeri primi. La dimostrazione era il risultato più significativo che si fosse ottenuto sui numeri primi da quando gli antichi greci avevano stabilito che tali numeri erano infiniti. Anche se non giungeremo mai a contare fino ai limiti estremi dell'universo dei numeri, Hadamard aveva dimostrato che un intrepido viaggiatore non avrebbe mai incontrato sorprese, per quanto avanti si fosse spinto. I primi indizi sperimentali scoperti da Gauss non erano uno scherzo giocato dalla Natura per ingannarci.

Hadamard non avrebbe mai potuto raggiungere quel risultato senza il vantaggio raggiunto da Riemann. Le sue idee erano permeate dell'analisi del paesaggio zeta compiuta da Riemann, e tuttavia egli era ancora ben lontano dal dimostrare la congettura di Riemann. Nel saggio in cui esponeva la dimostrazione, Hadamard riconosceva che il suo lavoro non eguagliava i risultati di Stieltjes, il quale aveva continuato a sostenere di possedere una dimostrazione dell'ipotesi di

Riemann fino alla morte, avvenuta nel 1894. Stieltjes è il capostipite di una lunga teoria di stimati matematici che hanno annunciato delle dimostrazioni ma non sono stati in grado di tener fede alle promesse.

Ben presto Hadamard venne a sapere che avrebbe dovuto dividere la gloria per aver dimostrato il teorema dei numeri primi. Contemporaneamente a lui, anche un matematico belga, Charles de la Vallée-Poussin, aveva trovato una dimostrazione. La grande impresa compiuta da Hadamard e de la Vallée-Poussin segnò l'inizio di un viaggio che sarebbe proseguito nel XX secolo, con i matematici che ora erano impazienti di spingersi avanti nell'esplorazione del paesaggio di Riemann. Hadamard e de la Vallée-Poussin avevano posto il campo base da cui partire per l'ascesa principale verso la retta critica di Riemann. Fu durante questo periodo che il problema cominciò ad assumere il ruolo di monte Everest nell'esplorazione matematica, anche se, paradossalmente, la sua dimostrazione richiedeva di passare per i punti più bassi del paesaggio zeta. Adesso che la soluzione della congettura di Gauss sui numeri primi era stata finalmente rivendicata, era giunto per il grande problema di Riemann il momento di emergere dalle oscure profondità del denso saggio berlinese.

Fu un altro matematico attivo a Gottinga, David Hilbert, che portò all'attenzione del mondo l'intuizione straordinaria di Riemann. Questa carismatica figura di matematico contribuì più di ogni altro a lanciare la caccia del XX secolo al trofeo più importante: l'ipotesi di Riemann.

Hilbert, il pifferaio magico della matematica

La città prussiana di Königsberg aveva raggiunto una certa notorietà matematica nel XVIII secolo grazie al rompicapo sui suoi ponti che Eulero aveva risolto nel 1735. Verso la fine del XIX secolo la città riconquistò un posto nella mappa matematica per aver dato i natali a David Hilbert, uno dei giganti della matematica del Novecento.

Benché fosse molto affezionato alla sua città d'origine, Hilbert si rendeva conto che il fuoco matematico più splendente ardeva dentro le mura di Gottinga. Grazie all'eredità lasciata da Gauss, Dirichlet, Dedekind e, soprattutto, Riemann, Gottinga era diventata una mecca della matematica. In quell'epoca Hilbert fu forse colui che più di ogni altro si rese conto di quale fosse la portata del cambiamento introdotto da Riemann in matematica. Riemann aveva capito che cercare di comprendere le strutture e gli schemi alla base del mondo matematico era più proficuo che concentrarsi su formule e calcoli noiosi. I matematici iniziavano ad ascoltare l'orchestra matematica in modo nuovo. Non più ossessionati dalle singole note, stavano cominciando a cogliere la musica di fondo proveniente dagli oggetti che studiavano. Riemann era stato l'iniziatore di un rinascimento del pensiero matematico che si affermò nella generazione di Hilbert. Come lo stesso Hilbert scrisse nel 1897, era sua intenzione mettere in atto «il principio di Riemann secondo cui le dimostrazioni dovrebbero essere guidate dal solo ragionamento e non dai calcoli».

David Hilbert (1862-1943).

Hilbert si fece un nome nei circoli accademici tedeschi proprio mettendo in atto questo principio. Da bambino aveva imparato che gli antichi greci avevano dimostrato l'esistenza di infiniti numeri primi, cioè dei numeri indispensabili per costruire ogni altro possibile numero. Da studente aveva letto che se si prendevano in considerazione le equazioni invece dei numeri, le cose apparivano diverse. Alla fine del XIX secolo era diventata una sfida dimostrare che, al contrario di quanto accade con i numeri primi, esisteva un numero finito di equazioni che si potevano usare

per generare certi insiemi infiniti di equazioni. I matematici dell'epoca di Hilbert cercavano di dimostrare questo fatto ricorrendo a un faticoso lavoro di costruzione delle equazioni. Hilbert sbalordì i suoi contemporanei dimostrando che questo insieme finito di elementi di base doveva esistere, benché egli non fosse in grado di costruirlo. Proprio come il maestro di scuola di Gauss era rimasto a guardare incredulo quello scolaro che in un attimo calcolava la somma dei numeri da 1 a 100, i superiori di Hilbert stentavano a credere che fosse possibile spiegare la teoria delle equazioni se non con un duro lavoro.

Per l'ortodossia matematica del tempo era un vero affronto. Se non si poteva vedere quell'elenco infinito, era difficile accettarne l'esistenza, anche se la dimostrazione la confermava. Sentirsi dire che qualcosa non si poteva vedere benché la sua esistenza fosse inequivocabile lasciava sconcertati quei matematici ancora devoti alla tradizione francese fondata sulle equazioni e sulle formule esplicite. A proposito dell'opera di Hilbert, Paul Gordan, uno degli esperti del campo, dichiarò: «Questa non è matematica. Questa è teologia». Ma Hilbert, benché non avesse ancora trent'anni, non indietreggiò. Alla fine le sue idee furono accettate, e persino Gordan gli diede ragione: «Mi sono convinto che la teologia ha i suoi pregi». Dopodiché Hilbert si dedicò allo studio dei numeri interi, un argomento che egli descriveva come «un edificio di rara bellezza e armonia».

Nel 1893 la Società matematica tedesca gli chiese di scrivere una relazione sullo stato della teoria dei numeri al ter-

mine del secolo. Era un compito di difficoltà scoraggiante per una persona poco più che trentenne. Cent'anni prima, la disciplina non esisteva nemmeno come entità coerente. Le *Disquisitiones arithmeticae* di Gauss, pubblicate nel 1801, avevano portato alla luce un terreno così fertile che per la fine del secolo la teoria dei numeri si era sviluppata al punto da essere ormai incontrollabile. Per contribuire a riportarla sotto controllo, a Hilbert si unì un vecchio amico, Hermann Minkowski. I due si conoscevano da quando erano stati studenti insieme a Königsberg. Minkowski si era fatto un nome nel campo della teoria dei numeri vincendo il Grand Prix des Sciences Mathématiques a diciott'anni. Era felicissimo di lavorare a un progetto che avrebbe portato in vita quelle che chiamava «le insinuanti melodie di questa musica potente». La loro collaborazione avrebbe forgiato la passione di Hilbert per i numeri primi, che secondo Minkowski si sarebbero «agitati e dimenati» sotto il loro riflettore.

La «teologia» di Hilbert gli valse il rispetto di un buon numero di influenti matematici europei. Nel 1895 ricevette una lettera da un professore di Gottinga, Felix Klein, che gli offriva un posto presso la venerata università cittadina. Hilbert non ebbe esitazioni e accettò immediatamente. Durante l'incontro in cui si discusse della sua assunzione, i membri della facoltà contestarono il supporto dato da Klein a Hilbert, insinuando che egli volesse assegnare il posto a un lacchè che non ce l'avrebbe mai fatta da solo. Al contrario Klein garantì loro di aver proposto «la persona più difficile di tutte». Quell'autunno Hilbert si trasferì nella città in cui Rie-

mann, il suo modello, era stato professore, con la speranza di promuovere la sua rivoluzione matematica.

I membri della facoltà non ci misero molto a capire che Hilbert non si accontentava di sfidare l'ortodossia matematica. Le mogli dei professori erano inorridite dal comportamento di questo nuovo arrivato. Come scrisse una di loro, «sta provocando uno sconvolgimento generale. Ho saputo che l'altra sera è stato visto in alcuni ristoranti giocare a biliardo con gli studenti». Col passare del tempo, Hilbert cominciò a conquistare i cuori delle signore di Gottinga e si fece la reputazione di donnaiolo. Alla festa per il suo cinquantesimo compleanno, i suoi studenti intonarono una canzone in cui ciascuna strofa, una per ogni lettera dell'alfabeto, descriveva per filo e per segno una delle sue conquiste.

Il professore bohémien acquistò una bicicletta a cui si affezionò profondamente. Lo si poteva vedere spesso pedalare per le vie di Gottinga mentre portava un mazzo di fiori colti in giardino a una delle sue fiamme. Teneva le lezioni in maniche di camicia, una cosa inaudita all'epoca. Nei ristoranti, per ripararsi dagli spifferi, non esitava a chiedere in prestito boa di piume alle donne che cenavano. Non era chiaro se Hilbert puntasse deliberatamente a suscitare scandalo o cercasse semplicemente la soluzione più ovvia a ogni possibile problema. Ciò che era chiaro, tuttavia, era che la sua mente era concentrata più sulle questioni matematiche che non sulle finezze dell'etichetta sociale.

Hilbert sistemò una lavagna di tre metri nel proprio giardino. Su di essa, fra la cura delle aiuole di fiori e un'acrobazia

in bicicletta, scarabocchiava la sua matematica col gessetto. Amava i ricevimenti e teneva sempre la musica ad alto volume, scegliendo la puntina più grande per il suo grammofono. Quando riuscì finalmente ad ascoltare Caruso dal vivo, ne rimase piuttosto deluso. «Caruso canta con la puntina piccola» commentò. Ma la matematica di Hilbert andava ben oltre le sue eccentricità. Nel 1898 distolse la propria attenzione dalla teoria dei numeri e la rivolse alle sfide della geometria. Ad attrarlo erano i nuovi tipi di geometria proposti da vari matematici nel corso del XIX secolo, teorie che pretendevano di violare uno degli assiomi fondamentali della geometria degli antichi greci. Data la sua fede profonda nel potere astratto della matematica, Hilbert considerava irrilevante la realtà fisica degli oggetti, perciò cominciò a studiare le connessioni e le strutture astratte che erano alla base di queste nuove geometrie. Per lui erano le relazioni fra gli oggetti a essere importanti. In una sua famosa dichiarazione, sostenne che una teoria geometrica avrebbe avuto senso anche se si fossero sostituiti punti, linee e piani con tavoli, sedie e boccali di birra.

Un secolo prima, Gauss aveva preso in considerazione la sfida posta da questi nuovi modelli di geometria, ma aveva esitato a esternare quei pensieri eretici. Di sicuro era impossibile che i greci si fossero sbagliati. Nondimeno, Gauss aveva cominciato a mettere in dubbio uno degli assiomi fondamentali della geometria euclidea, un assioma relativo all'esistenza di rette parallele. La domanda che si era posto Euclide era la seguente: se si tracciano una retta e un punto che non

le appartiene, quante rette passanti per quel punto sono parallele alla prima retta? Per Euclide la risposta ovvia era che esisteva una e solo una di tali rette parallele.

Già a sedici anni Gauss aveva iniziato a formulare ipotesi sulla possibile esistenza di geometrie altrettanto coerenti e valide nelle quali non c'erano rette parallele. Oltre alla geometria euclidea e a queste nuove geometrie senza parallele, avrebbe potuto esserci anche una terza classe di geometrie in cui le rette parallele erano più d'una. Se le cose stavano così, dovevano esistere geometrie nelle quali la somma degli angoli di un triangolo non era più uguale a 180 gradi, un'eventualità che gli antichi greci avevano ritenuto inammissibile. Ma se c'erano molte geometrie possibili, si chiese Gauss, quale di esse descriveva meglio il mondo reale? Senza dubbio i greci avevano ritenuto che il loro modello fornisse una descrizione matematica della realtà fisica. Ma Gauss non era affatto convinto che avessero ragione.

Molti anni dopo, mentre compiva rilevamenti topografici del territorio dello Stato d'Hannover, Gauss utilizzò alcune delle misurazioni fatte nei dintorni di Gottinga per verificare se un triangolo di raggi di luce proiettati dalle sommità di tre colline non contraddicesse la geometria euclidea producendo una somma dei suoi angoli diversa da 180 gradi. Gauss si domandava se la traiettoria rettilinea seguita da un raggio di luce non avesse potuto incurvarsi nello spazio. Forse lo spazio tridimensionale era curvo, così come lo era la superficie bidimensionale del globo. Gauss pensava ai cosiddetti grandi circoli, come le linee della longitudine, lungo i quali si

misura il percorso più breve fra due punti sulla superficie della Terra. In questa geometria bidimensionale non esistono linee parallele di longitudine, dato che tutte si incontrano ai poli. Nessuno aveva preso in considerazione l'idea che anche lo spazio tridimensionale avrebbe potuto incurvarsi.

Oggi sappiamo che Gauss operava su una scala troppo piccola per poter osservare una curvatura significativa dello spazio e contraddire così la concezione euclidea del mondo. La sua intuizione fu confermata quando, durante l'eclisse solare del 1919, Arthur Eddington ebbe la prova del fatto che la luce proveniente dalle stelle subiva una deviazione. Gauss non rese mai pubbliche le proprie idee, forse perché le sue nuove geometrie sembravano in conflitto con il compito della matematica, che era quello di dare una rappresentazione della realtà fisica. Agli amici con i quali si confidò, chiese di mantenere il segreto.

Alla fine, l'idea di queste nuove geometrie fu avanzata pubblicamente negli anni Trenta dell'Ottocento dal russo Nikolaj Ivanovič Lobačevskij e dall'ungherese János Bólyai. La scoperta delle geometrie non euclidee, come le battezzò Gauss, non scossero il vascello matematico quanto egli aveva temuto: fu semplicemente scartata perché troppo astratta. Di conseguenza le geometrie non euclidee furono ignorate per molti anni. All'epoca di Hilbert, tuttavia, stavano cominciando a emergere come una perfetta espressione del suo approccio più astratto al mondo matematico.

Secondo alcuni matematici, ogni geometria che non soddisfacesse l'assioma di Euclide sulle rette parallele doveva

contenere una qualche contraddizione interna che ne avrebbe causato il crollo. Quando Hilbert cominciò a esplorare questa possibilità, capì che un forte nesso logico legava geometria non euclidea e geometria euclidea. Scoprì che in un unico caso le geometrie non euclidee potevano contenere delle contraddizioni: se anche la geometria euclidea ne conteneva. Sembrava un primo passo avanti. All'epoca i matematici ritenevano che la geometria di Euclide si fondasse su una logica salda. La scoperta di Hilbert significava che quei modelli non euclidei dovevano poggiare sulle stesse fondamenta logiche. Se una geometria fosse crollata, avrebbe trascinato con sé tutte le altre. Ma poi Hilbert si rese conto di una cosa piuttosto inquietante. In realtà nessuno aveva mai *dimostrato* che la geometria euclidea non contenesse contraddizioni nascoste.

Hilbert cominciò a pensare a come si potesse dimostrare che la geometria euclidea non conteneva contraddizioni. Anche se nei duemila anni successivi a Euclide nessuno era stato capace di trovarne, questo non significava che non ce ne fossero. Hilbert decise che la prima cosa da fare era riformulare la geometria in termini di formule ed equazioni. Questa pratica era stata inaugurata da Cartesio (da cui il nome di geometria cartesiana) e adottata dai matematici francesi del XVIII secolo. Era possibile ricondurre la geometria all'aritmetica attraverso equazioni che descrivevano linee e punti, e dove ogni punto poteva essere trasformato in numeri che descrivevano le sue coordinate nello spazio. I matematici ritenevano che la teoria dei numeri non contenesse alcu-

na contraddizione, perciò Hilbert sperava che esprimendo la geometria euclidea in numeri sarebbe stato possibile stabilire se essa contenesse contraddizioni.

Ma invece di una risposta al problema, Hilbert trovò qualcosa di ancor più inquietante: in realtà nessuno aveva dimostrato che la stessa teoria dei numeri non contenesse contraddizioni. Hilbert dovette rimanere di sasso. Il fatto che per millenni la matematica avesse funzionato tanto in teoria quanto in pratica senza produrre contraddizioni aveva infuso nei matematici fiducia in quello che facevano. «Allez en avant, et la fois vous viendra» («Andate avanti e la fede vi arriverà») era la risposta data dal matematico francese del XVIII secolo Jean-Baptiste Le Rond D'Alembert a chi metteva in dubbio i fondamenti della disciplina. Per i matematici, l'esistenza dei numeri che studiavano era reale quanto quella degli organismi che i biologi classificavano. Erano ben felici di svolgere la loro attività traendo deduzioni da presupposti, che ritenevano verità lampanti, sui numeri. Nessuno aveva preso in considerazione l'eventualità che quei presupposti potessero condurre a contraddizioni.

Hilbert era stato spinto sempre più indietro, fino a dover mettere in dubbio la base stessa su cui era stata costruita la matematica. Ora che la questione era stata posta, era impossibile ignorare quei problemi fondamentali. Lo stesso Hilbert era convinto che non si sarebbe mai scoperta alcuna contraddizione e che i matematici possedessero i mezzi per dissipare ogni dubbio in proposito, per dimostrare che la disciplina era edificata su pilastri solidissimi. La sua questione

annunciò l'arrivo di una nuova era della matematica. Il XIX secolo aveva visto la transizione della matematica da utile ausilio pratico per la scienza a ricerca teorica di verità fondamentali, più simile alla filosofia di un ex cittadino di Königsberg, Immanuel Kant. Le considerazioni di Hilbert sui fondamenti stessi della disciplina gli fornirono la piattaforma da cui lanciare questa nuova pratica di una matematica astratta. Il suo approccio inedito avrebbe caratterizzato la matematica del XX secolo.

Alla fine del 1899 Hilbert si vide offrire un'opportunità ideale per riunire i cambiamenti straordinari che le sue nuove idee stavano producendo nei campi della geometria, della teoria dei numeri e dei fondamenti logici della matematica. Ricevette l'invito a pronunciare uno dei discorsi più importanti al Congresso internazionale dei matematici che si sarebbe tenuto l'anno successivo a Parigi. Era un grande onore per un matematico non ancora quarantenne.

L'incarico di parlare davanti all'intera comunità matematica all'inizio di un nuovo secolo intimidiva Hilbert. Sicuramente richiedeva un discorso di grande peso, che fosse all'altezza dell'occasione. Hilbert cominciò a consultarsi con gli amici riguardo all'idea di utilizzare la prolusione per avanzare ipotesi sul futuro della matematica. Sarebbe stata una cosa decisamente non convenzionale, che andava contro la regola non detta secondo cui soltanto delle idee complete, pienamente formate, dovevano essere rese pubbliche. Avrebbe richiesto una certa dose di audacia rinunciare alla sicurezza garantita dal fatto di presentare dimostrazioni di teoremi noti

per speculare invece sulle incertezze del futuro. Ma Hilbert non fu mai una persona incline a indietreggiare di fronte alle controversie. Alla fine decise di proporre come sfida alla comunità matematica internazionale ciò che non era stato dimostrato piuttosto che limitarsi a riferire ciò che era già certo.

Tuttavia gli rimanevano dei dubbi. Era saggio usare quell'occasione per tentare qualcosa di tanto nuovo? Forse avrebbe fatto meglio a seguire le convenzioni e a parlare di ciò che era riuscito a fare invece che di ciò che non era in grado di risolvere. Le procrastinazioni gli impedirono di sottoporre il titolo del suo discorso entro i termini stabiliti, e perciò non fu inserito nella lista dei conferenzieri del congresso. Nell'estate del 1900 gli amici di Hilbert temevano che egli potesse lasciarsi sfuggire completamente quella meravigliosa opportunità di presentare le sue idee, ma un giorno tutti loro trovarono sulle proprie scrivanie il testo del discorso che Hilbert avrebbe tenuto. Si intitolava semplicemente «Problemi matematici».

Hilbert riteneva che i problemi fossero la linfa vitale della matematica, ma anche che fosse necessario sceglierli con cura. «Un problema matematico dovrebbe essere difficile in modo da attrarci» scrisse «e tuttavia non completamente inaccessibile, per evitare che vanifichi tutti i nostri sforzi. Per noi dovrebbe essere un segnale con cui orientarci nei percorsi labirintici che conducono a verità nascoste, e in definitiva un modo di ricordarci del piacere che ci dà una soluzione riuscita.» I ventitré problemi che aveva deciso di presentare erano stati selezionati in modo da aderire perfettamente a

questo criterio rigoroso. Nel caldo afoso dell'agosto parigino, Hilbert si alzò nel salone della Sorbona per tenere il suo discorso e proporre una sfida agli esploratori matematici del nuovo secolo.

Verso la fine dell'Ottocento molte aree di studio erano state influenzate dal movimento filosofico dell'illustre fisiologo Emil du Bois-Reymond, secondo cui ci sono dei limiti alla nostra capacità di comprendere la Natura. La frase a effetto diffusa nei circoli filosofici era «Ignoramus et ignorabimus»: non sappiamo e continueremo a non sapere. Ma il sogno di Hilbert per il nuovo secolo era di spazzar via quel pessimismo. Egli terminò la sua introduzione ai ventitré problemi con un esaltante grido di battaglia: «Questa convinzione della risolvibilità di ogni problema matematico è un potente incentivo per chi opera nel campo. Dentro di noi sentiamo il richiamo incessante: c'è un problema. Cerchiamo la soluzione. La si può trovare per mezzo della pura ragione, perché in matematica non esiste *ignorabimus*».

I problemi che Hilbert pose ai matematici del nuovo secolo catturavano lo spirito rivoluzionario di Bernhard Riemann. I primi due dell'elenco di Hilbert riguardavano le questioni sui fondamenti della matematica che avevano cominciato a ossessionarlo, ma gli altri spaziavano in ogni angolo del paesaggio matematico. Alcuni di essi erano più progetti aperti che non questioni da cui si traeva l'impressione di dover ottenere risposte chiare. Fra questi, uno era collegato al sogno di Riemann sulla possibilità di rispondere alle questioni fondamentali della fisica usando la sola matematica.

Il quinto problema nasceva dall'idea di Riemann secondo cui i vari campi della matematica, come l'algebra, l'analisi e la geometria, erano intimamente correlati, così che non era possibile comprenderli se li si teneva isolati l'uno dall'altro. Riemann aveva dimostrato come fosse possibile dedurre le proprietà algebriche delle equazioni dalla geometria dei grafici definiti da quelle stesse equazioni. C'era voluto un certo coraggio per opporsi al dogma secondo cui l'algebra e l'analisi dovevano essere tenute lontane dal potere potenzialmente fuorviante della geometria. È per questa ragione che i matematici dello stampo di Eulero e Cauchy erano così contrari alla rappresentazione grafica dei numeri immaginari. Per loro, i numeri immaginari erano soluzioni di equazioni come $x^2 = -1$ e non avrebbero dovuto essere confusi con delle immagini. Ma per Riemann era ovvio che le discipline erano collegate.

Hilbert accennava all'ultimo teorema di Fermat nei preparativi all'annuncio dei suoi ventitré problemi. Ma curiosamente, a dispetto della percezione pubblica di questo problema come una delle grandi questioni irrisolte in matematica, anche all'epoca di Hilbert, esso non entrò mai a far parte delle sue scelte. Hilbert riteneva che fosse «un notevole esempio dell'effetto ispiratore che un problema tanto particolare e apparentemente privo di importanza possa avere sulla scienza». Gauss aveva espresso lo stesso parere quando aveva dichiarato che si sarebbe potuta scegliere una quantità di altre equazioni e domandarsi se avessero delle soluzioni oppure no. Non c'era nulla di speciale nella scelta fatta da Fermat.

Dalla critica mossa da Gauss all'ultimo teorema di Fermat

Hilbert prese ispirazione per il suo decimo problema: esiste un algoritmo (una procedura matematica che opera in modo simile a un programma per computer) che permetta di decidere in un tempo finito se un'equazione qualsiasi ha soluzioni? Hilbert sperava che la sua domanda avrebbe distolto l'attenzione dei matematici dal particolare e li avrebbe convinti a concentrarsi sull'astratto. Lui stesso, per esempio, aveva sempre apprezzato il modo in cui Gauss e Riemann avevano incoraggiato l'adozione di una nuova prospettiva sui numeri primi. Ora i matematici non erano più ossessionati dal problema di stabilire se un particolare numero fosse primo; cercavano invece di comprendere la musica che sgorgava da tutti i numeri primi. Hilbert sperava che il suo quesito relativo alle equazioni avesse un effetto simile.

Anche se un reporter presente alla conferenza descrisse la discussione che ne seguì come «desultoria», ciò aveva più a che fare con l'opprimente clima agostano che non con l'attrattiva del discorso di Hilbert. Come disse Minkowski, il suo amico più intimo, «grazie a questo discorso, che certo ogni matematico al mondo senza eccezione si assicurerà di leggere, la tua presa sui giovani matematici aumenterà». Il rischio che Hilbert si assumeva presentando un discorso così poco convenzionale cementò la sua reputazione di pioniere del nuovo pensiero matematico del XX secolo. Minkowski riteneva che quei ventitré problemi avrebbero avuto un'influenza enorme. «Tu hai veramente monopolizzato la matematica per il XX secolo» disse a Hilbert. Le sue parole si rivelarono profetiche.

All'interno del suo elenco di problemi aperti e generali ce n'era uno, l'ottavo, che era molto specifico: dimostrare l'ipotesi di Riemann. In un'intervista, Hilbert affermò di ritenere l'ipotesi di Riemann il problema più importante «non soltanto in matematica ma il più importante in assoluto». Nel corso della stessa intervista gli fu chiesto quale pensasse che sarebbe stata la più grande impresa tecnologica. «Catturare una mosca sulla Luna» rispose. «Perché i problemi ausiliari che sarebbe necessario risolvere per poter raggiungere un tale risultato richiedono la soluzione di quasi tutti i problemi materiali dell'umanità.» Un'analisi penetrante, se si considera come sono andate le cose nel XX secolo.

Hilbert riteneva che una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann avrebbe fatto per la matematica quello che la caccia lunare a una mosca avrebbe fatto per la tecnologia. Dopo aver proposto l'ipotesi come ottavo problema del suo elenco, proseguì spiegando ai delegati del Congresso internazionale che una piena comprensione della formula di Riemann sui numeri primi ci avrebbe probabilmente messo nella posizione di comprendere molti degli altri misteri relativi ai numeri primi. Citò sia la congettura di Goldbach sia il problema dell'esistenza di infiniti numeri primi gemelli. L'interesse di dimostrare l'ipotesi di Riemann era doppio: oltre a chiudere un capitolo nella storia della matematica, avrebbe aperto molte nuove porte.

Hilbert non pensava che l'ipotesi di Riemann sarebbe rimasta irrisolta tanto a lungo. In una conferenza che tenne nel 1919, si disse ottimista sulla possibilità di vivere abba-

stanza per assistere alla sua dimostrazione, e che la persona più giovane del pubblico sarebbe vissuto abbastanza per assistere a quella dell'ultimo teorema di Fermat. Ma predisse con baldanza che nessuno dei presenti sarebbe stato testimone della conquista del settimo problema del suo elenco: stabilire se 2 elevato alla radice quadrata di 2 fosse la soluzione di un'equazione. Non c'è dubbio che Hilbert avesse un grande intuito matematico, ma le sue capacità di preveggenza non erano altrettanto buone. Di lì a dieci anni il settimo problema sarebbe caduto. C'è anche la remota possibilità che qualche giovane laureato presente alla conferenza di Hilbert del 1919 sia vissuto abbastanza per essere testimone della dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat da parte di Andrew Wiles nel 1994. Ma a dispetto dei progressi entusiasmanti compiuti negli ultimi decenni, è ben possibile che l'ipotesi di Riemann sarà ancora irrisolta quando Hilbert si risveglierà, come Barbarossa, dopo un'attesa di cinquecento anni.

Ci fu un'occasione in cui Hilbert pensò che non avrebbe dovuto aspettare tanto a lungo. Un giorno ricevette lo scritto di uno studente che asseriva di aver dimostrato l'ipotesi di Riemann. Hilbert non ci mise molto a trovare un errore nella presunta dimostrazione, ma il metodo utilizzato lo impressionò. Purtroppo lo studente morì un anno dopo, e a Hilbert fu chiesto di tenere un discorso sulla sua tomba. Egli lodò le idee del ragazzo ed espresse la speranza che un giorno potessero stimolare una dimostrazione della grande congettura. Poi, con una digressione totalmente fuori luogo, e che

illustra perfettamente lo stereotipo dei matematici alienati dalla realtà sociale, con le parole «Si consideri una funzione definita nel dominio dei numeri immaginari...» Hilbert si lanciò nei dettagli della dimostrazione errata. Che sia vero oppure no, l'episodio è verosimile. Di tanto in tanto i matematici hanno visioni molto limitate.

Il discorso di Hilbert al Congresso del 1900 portò immediatamente l'ipotesi di Riemann al centro dell'attenzione. Adesso era considerata uno dei più grandi problemi irrisolti della matematica. Anche se l'ossessione di Hilbert per l'ipotesi non produsse contributi diretti alla sua soluzione, il nuovo programma che egli propose per la matematica del XX secolo ebbe effetti profondi. Alla fine del secolo persino le questioni da lui poste sulla fisica e quelle di carattere fondamentale riguardanti gli assiomi della matematica avrebbero avuto un ruolo nel miglioramento della nostra comprensione dei numeri primi. Intanto, però, Hilbert ebbe il merito di portare a Gottinga un matematico che avrebbe raccolto il testimone passato da Gauss a Dirichlet e da questi a Riemann.

Landau, il più difficile degli uomini

All'università di Gottinga si era liberata una cattedra a seguito della morte tragicamente precoce di Minkowski, l'amico più stretto di Hilbert. A soli quarantacinque anni Minkowski fu vittima di un'appendicite letale. Hilbert era appena riuscito a risolvere il problema di Waring, che riguardava la

scrittura dei numeri interi come somme finite di cubi o di potenze superiori. Sapeva che il suo amico avrebbe apprezzato quel risultato, dato che generalizzava il risultato per il quale Minkowski aveva ricevuto dall'Accademia di Francia, quando aveva diciott'anni appena, il Grand Prix des Sciences Mathématiques. «Persino nel letto d'ospedale, dove giaceva mortalmente afflitto, lo preoccupava il fatto di non poter essere presente al successivo appuntamento del seminario, quando avrei parlato della mia soluzione del problema di Waring.»

La morte di Minkowski scosse profondamente Hilbert. Uno studente di Gottinga raccontò: «Ero in classe quando Hilbert ci riferì della morte di Minkowski, e scoppiò a piangere. Dato il prestigio di un professore a quei tempi e la grande distanza che lo separava dagli studenti, per noi fu più lo shock di vedere Hilbert piangere che quello di sentire che Minkowski era morto». Hilbert desiderava trovare un successore di Minkowski che avesse una passione per la teoria dei numeri pari a quella del suo compianto amico.

A detta di tutti la persona scelta da Hilbert, Edmund Landau, non era un uomo facile. A quanto pare ci fu una sorta di ballottaggio per decidere se assegnare la cattedra a lui o a un altro candidato. Hilbert chiese ai suoi colleghi: «Chi dei due è il più difficile?». Quando gli fu risposto che senza dubbio era Landau, Hilbert disse che Gottinga doveva avere Landau. Il loro non sarebbe mai stato un dipartimento di *yes-men*. Hilbert voleva dei colleghi che sfidassero le convenzioni sociali e quelle matematiche.

Landau era severo con i suoi studenti e nel dipartimento teneva fede alla fama di persona dal carattere spinoso. Gli studenti erano terrorizzati al pensiero di essere invitati a casa sua per i fine settimana, dove dovevano assecondare la sua passione per i giochi matematici. Fresco sposo, uno dei suoi studenti stava per partire per la luna di miele. Il treno era quasi uscito dalla stazione di Gottinga quando Landau arrivò come una furia sulla banchina, spinse le bozze del suo ultimo libro attraverso il finestrino della vettura e intimò: «Le voglio corrette per quando ritorni!».

Edmund Landau (1877-1938).

Presto Landau assunse il ruolo di continuatore della tradizione di Riemann e Gauss e divenne la figura centrale in Europa per lo sviluppo dell'opera di de la Vallée-Poussin e di

Hadamard. Il suo temperamento si adattava perfettamente all'impresa di lasciare il campo base che loro avevano posto e puntare deciso verso le pendici del monte Riemann. Per dimostrare la congettura di Gauss sui numeri primi, Hadamard e de la Vallée-Poussin avevano mostrato che non esistevano zeri sulla linea di confine nord-sud passante per il numero 1. La sfida che si poneva adesso era dimostrare che non si sarebbe incontrato nemmeno uno zero prima di raggiungere la retta critica di Riemann passante per $\frac{1}{2}$.

Alla spedizione di Landau si unì il matematico danese Harald Bohr. Bohr, pur lavorando a Copenhagen, era uno dei tanti pellegrini che attraversavano regolarmente l'Europa per recarsi a Gottinga. Suo fratello Niels avrebbe raggiunto una fama mondiale come uno dei creatori della teoria della meccanica quantistica. Harald si era già fatto un nome nel gioco del calcio: era stato uno dei giocatori fondamentali della squadra nazionale danese che aveva conquistato la medaglia d'argento ai giochi olimpici del 1908.

Insieme, Landau e Bohr compirono il primo tentativo coronato da successo di navigare attraverso i punti a livello del mare nel paesaggio di Riemann. Riuscirono a dimostrare che alla maggior parte degli zeri piaceva restare addossati alla retta magica di Riemann. Considerarono il numero di zeri compresi fra 0,50 e 0,51 e lo confrontarono con il numero di zeri che giacevano al di fuori di questa sottile striscia di terra. In tal modo furono in grado di dimostrare che gli zeri presenti in quella striscia rappresentavano come minimo una grande porzione degli zeri totali. Riemann aveva previ-

sto che tutti gli zeri sarebbero caduti sulla retta passante per $\frac{1}{2}$. Landau e Bohr non erano riusciti a dimostrare nulla di tanto preciso, ma avevano compiuto un primo passo su quella strada.

Perché la loro argomentazione funzionasse, non necessariamente la striscia doveva avere una larghezza pari a 0,01. Anche se fosse stata larga soltanto $1/10^{30}$, per fare un esempio, Landau e Bohr sarebbero stati in grado di dimostrare che la maggior parte degli zeri si trovavano all'interno di quella fascia verticale di territorio. Ma la cosa frustrante era che né Landau né Bohr erano in grado di dedurne che la maggior parte degli zeri doveva cadere effettivamente sulla retta di Riemann passante per $\frac{1}{2}$, una verità che Riemann sosteneva di aver dimostrato ma non aveva mai pubblicato. Questo fatto può sembrare assurdo. Se tutti gli zeri giacciono in una fascia la cui larghezza si può ridurre a piacere, allora perché non possiamo concluderne che la maggioranza di essi debba cadere proprio sulla retta critica? Questi sono i misteri della matematica. Supponete, per esempio, che per ogni numero N ci siano 10^N zeri nella stretta fascia compresa fra $\frac{1}{2} + 1/10^{N+1}$ e $\frac{1}{2} + 1/10^N$. Questo scenario ipotetico soddisferebbe il risultato stabilito da Bohr e Landau senza implicare che anche uno soltanto degli zeri giaccia sulla retta critica passante per $\frac{1}{2}$.

In quel periodo Gottinga cominciava a tener fede al motto che campeggiava sul palazzo municipale proclamando che al di fuori delle mura medievali della città non c'era vita. All'inizio del XX secolo, la tranquilla cittadina universi-

taria di Riemann si era trasformata, grazie all'influenza di Hilbert, in una potenza della matematica europea. Al tempo di Riemann era Berlino a vibrare di energia intellettuale, ma qualche decennio dopo, quando a Hilbert venne offerta una cattedra all'università di Berlino, egli la rifiutò. Adesso era la cittadina medievale impregnata dell'eredità lasciata da Gauss a costituire l'ambiente perfetto per svolgere l'attività matematica.

Hilbert riuscì a portare a Gottinga i migliori matematici del mondo grazie al denaro donato da Paul Wolfskehl, un professore di matematica che era morto nel 1908. Nel suo testamento Wolfskehl aveva espresso il desiderio di lasciare 100.000 marchi come premio per la prima persona che avesse concepito una dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat. Era proprio questo il premio di cui Andrew Wiles avrebbe letto da bambino e che avrebbe acceso il suo interesse per la ricerca di una soluzione all'enigma di Fermat. (Il premio in denaro che alla fine Wiles ricevette per la sua dimostrazione aveva subito una forte svalutazione a causa dell'iperinflazione che colpì la Germania dopo entrambe le guerre mondiali.) Il testamento di Wolfskehl stabiliva che per ogni anno passato senza che il problema fosse stato risolto gli interessi maturati sulla somma da assegnare come premio dovessero essere utilizzati come fondi per i matematici in visita a Gottinga.

Landau si accollò il compito di controllare le soluzioni spedite alla facoltà di Gottinga. Alla fine il carico di lavoro divenne talmente pesante che egli si risolse a passare i mano-

scritti ai suoi studenti insieme a una lettera di rifiuto prestampata. Il testo della lettera era: «La ringraziamo per la sua soluzione dell'ultimo teorema di Fermat. Il primo errore occorre a pagina... riga...». Hilbert si assunse l'incarico molto più piacevole di spendere gli interessi che il premio in denaro non riscosso produceva. Essi gli diedero i mezzi per portare molti matematici a Gottinga, al punto da fargli sperare che l'ultimo teorema di Fermat non venisse mai risolto. «Perché dovrei uccidere la gallina dalle uova d'oro?» si chiedeva.

Era opinione generale che ogni giovane matematico che volesse farsi strada nel mondo doveva prima di tutto farsi strada a Gottinga. Uno studente paragonò l'influenza di Hilbert sulla matematica al «dolce flauto del pifferaio magico [...] che seduce un gran numero di topi inducendoli a seguirlo nel fiume profondo della matematica». Non sorprende che molti di quei topi matematici venissero dalle accademie fiorite nell'Europa continentale nel corso delle rivoluzioni politiche e intellettuali che l'avevano investita da un capo all'altro nel XIX secolo.

Al contrario, la Gran Bretagna soffriva della sua tradizionale incapacità di assorbire le buone idee provenienti dal continente. Proprio come le coste dell'Inghilterra avevano offerto un baluardo invalicabile contro i tumulti politici della Rivoluzione francese, così i matematici inglesi si erano lasciati scappare la rivoluzione di Riemann. I numeri immaginari continuavano a essere considerati un pericoloso concetto continentale. Di fatto, in Inghilterra la matematica non aveva più compiuto grandi progressi dal tempo della disputa

fra Leibniz e Newton, nel XVII secolo, riguardo a chi dei due dovesse attribuirsi il merito per la scoperta del calcolo infinitesimale. Anche se Newton era stato il primo, per molti anni lo sviluppo matematico del suo Paese sarebbe stato ostacolato dal rifiuto di riconoscere la superiorità del modo in cui Leibniz aveva elaborato la nuova materia. Le cose, tuttavia, stavano per cambiare.

Hardy, l'esteta della matematica

Nel 1914 Landau e Bohr avevano completato la loro opera, dimostrando che la maggior parte degli zeri si ammassava contro la retta critica di Riemann. Ma fin dove erano giunti i matematici nell'individuazione degli zeri che cadevano esattamente sulla linea? Del numero infinito di punti a livello del mare, fino a quel momento ne erano stati identificati soltanto settantuno che giacevano allineati lungo la retta critica di Riemann.

Poi vi fu un'importante svolta psicologica. Dopo due secoli trascorsi nel più completo disinteresse per le idee provenienti dal continente, un matematico inglese, G.H. Hardy, afferrò il testimone di Riemann e riuscì a dimostrare che sulla retta nord-sud passante per $\frac{1}{2}$ si allineava effettivamente un numero infinito di zeri della funzione zeta. Hilbert fu molto impressionato dal contributo di Hardy, tanto che quando venne a sapere che Hardy aveva dei problemi con le autorità del Trinity College a Cambridge riguardo alla

sua sistemazione, scrisse una lettera al direttore del college. Hardy, scrisse Hilbert, non era soltanto il migliore matematico del Trinity, era il migliore d'Inghilterra, e perciò gli si sarebbe dovuto assegnare il miglior alloggio disponibile.

La notorietà di Hardy al di fuori dei circoli matematici deve molto alle sue incisive memorie intitolate *Apologia di un matematico*, ma egli si conquistò gloria matematica per i contributi che diede alla teoria dei numeri primi e all'ipotesi di Riemann. Se Hardy aveva dimostrato che un numero infinito di zeri giaceva sulla retta critica, significava che i giochi erano chiusi? Significava che Hardy aveva dimostrato l'ipotesi di Riemann? Dopo tutto, se ci sono infiniti zeri e se Hardy aveva dimostrato che un numero infinito di questi zeri si trovano sulla retta di Riemann, non siamo in una botte di ferro?

L'infinito, purtroppo, è un personaggio subdolo. Hilbert amava illustrarne i misteri usando l'immagine di un hotel con un numero infinito di stanze. Potreste controllare ogni stanza di numero dispari e trovarle tutte occupate, ma anche quando ne avrete controllato un numero infinito resteranno ancora tutte le stanze di numero pari di cui dar conto. Nel caso di Hardy, al controllo delle stanze per vedere se fossero occupate si sostituiva quello degli zeri per vedere se si trovassero sulla retta critica. Sfortunatamente Hardy non fu in grado di dimostrare neppure che almeno metà degli zeri erano sulla retta. Pur avendo controllato un numero infinito di stanze, in rapporto alle stanze che rimanevano da controllare quell'infinito rappresentava lo zero per cento. Il risultato ottenuto da Hardy era straordinario ma la strada da percorrere

era ancora molto lunga. Aveva strappato un morso dall'insieme degli zeri, ma ciò che gli restava davanti rimaneva enorme e oscuro come prima.

Quel primo stuzzicante assaggio, tuttavia, dovette avere l'effetto di una droga per Hardy. Se si eccettuano forse la passione per il cricket e una personale lotta incessante con Dio, nulla l'ossessionava tanto quanto il desiderio di dimostrare che tutti gli zeri giacevano sulla retta di Riemann. Così come per Hilbert, l'ipotesi di Riemann era in cima alla lista dei desideri di Hardy, e ciò appare chiaro dai propositi per l'anno nuovo che egli scrisse su una delle tante cartoline che spediva ad amici e colleghi:

(1) Dimostrare l'ipotesi di Riemann.
(2) Fare un punteggio di 211 [il primo numero primo superiore a 200] nel quarto innings dell'ultimo test match all'Oval.
(3) Trovare un argomento per la non esistenza di Dio che convinca il grande pubblico.
(4) Essere il primo uomo a raggiungere la vetta del monte Everest.
(5) Essere proclamato il primo presidente dell'U.R.S.S., della Gran Bretagna e della Germania.
(6) Assassinare Mussolini.

I numeri primi avevano affascinato Hardy fin dalla tenera età. Da bambino, in chiesa, si divertiva a scomporre i numeri degli inni nei numeri primi da cui erano costituiti. Amava

compulsare libri che contenevano curiosità su questi numeri fondamentali, libri che, sosteneva, erano «meglio delle cronache delle partite di calcio come lettura leggera per la prima colazione». Di fatto Hardy riteneva che chiunque traesse piacere dalla lettura delle cronache degli incontri di calcio avrebbe apprezzato le gioie dei numeri primi. «È una peculiarità della teoria dei numeri il fatto che in buona parte potrebbe essere pubblicata sui quotidiani, e farebbe guadagnare nuovi lettori al "Daily Mail".» Egli pensava che i numeri primi serbassero un mistero sufficiente per intrigare il lettore e che tuttavia fossero abbastanza semplici perché chiunque potesse iniziare a esplorarne la magia. Più di ogni altro matematico dell'epoca, Hardy si impegnò molto per comunicare una parte di questa passione per la sua disciplina, né pensava che dovesse rimanere il piacere segreto di coloro che stanno nelle torri d'avorio dell'ambiente accademico.

Come indica il terzo dei suoi propositi per l'anno nuovo, la chiesa in cui da piccolo scomponeva i numeri degli inni in numeri primi ebbe un profondo effetto su di lui. Ben presto diventò uno spietato avversario dell'idea che esistesse un Dio e dei simboli esteriori della religione. Con Dio avrebbe combattuto una battaglia senza sosta nel corso di tutta la sua vita, tentando di dimostrare l'impossibilità della sua esistenza. La sua lotta divenne così personale che paradossalmente egli finì per evocare proprio quella figura la cui esistenza tanto veementemente desiderava negare. Quando si recava a vedere gli incontri di cricket, portava con sé un corredo di armi «antidio» per scongiurare ogni possibilità che piovesse. An-

che se in cielo non c'era una nuvola, arrivava allo stadio con quattro maglioni, un ombrello e un fascio di lavoro da fare sotto il braccio. Come spiegava agli spettatori che gli sedevano accanto al campo di gioco, stava cercando di indurre Dio a pensare che egli sperasse che piovesse, di modo da avere l'opportunità di portarsi un po' avanti con il lavoro. La sua idea era che Dio, suo nemico giurato, avrebbe fatto splendere il sole al solo scopo di mandargli in fumo ogni prospettiva di utilizzare quel tempo per fare della matematica.

Un giorno d'estate Hardy rimase molto deluso nel vedere la partita di cricket a cui stava assistendo interrompersi bruscamente perché il battitore si era lamentato di essere stato accecato da un lampo di luce proveniente dalle tribune dove lui era seduto. Ma la sua irritazione si trasformò in gioia quando fu chiesto a un ecclesiastico dalla stazza gigantesca di togliersi l'enorme croce d'argento che teneva al collo, dato che rifletteva la luce del sole. Hardy non poté trattenersi e passò la pausa pranzo a mandare cartoline a raffica ai suoi amici per raccontare la schiacciante vittoria del cricket sul clero.

Quando a settembre la stagione del cricket finiva, Hardy faceva spesso visita a Harald Bohr a Copenhagen prima che l'anno accademico inglese avesse inizio. I due avevano un rituale di lavoro quotidiano. Ogni mattina mettevano sul tavolo un foglio di carta su cui Hardy scriveva quale sarebbe stato il loro compito per quel giorno: dimostrare l'ipotesi di Riemann. Hardy coltivava la speranza che le idee sviluppate da Bohr durante le sue visite a Gottinga potessero fornire un

percorso che conducesse a una dimostrazione. Per tutto il resto della giornata potevano dedicarsi a passeggiare e a parlare, o a scarabocchiare appunti. Più e più volte i loro sforzi non partorirono il progresso che Hardy tanto sperava di raggiungere.

Poi, in un'occasione, poco dopo che Hardy si era messo in viaggio per far ritorno in Inghilterra per l'inizio di un nuovo anno accademico, Bohr ricevette una cartolina. Il cuore si mise a correre all'impazzata mentre leggeva le parole di Hardy: «Ho la dimostrazione dell'ipotesi di Riemann. La cartolina è troppo breve per la dimostrazione». Finalmente Hardy aveva superato l'impasse. Quella cartolina, tuttavia, aveva qualcosa di stranamente familiare. Nella mente di Bohr balenarono gli stuzzicanti commenti a margine di Fermat. Hardy era troppo un mattacchione per essersi lasciato sfuggire quel tocco d'ironia nella sua cartolina. Bohr decise di rimandare le celebrazioni e attendere da Hardy ulteriori dettagli. Com'era prevedibile, la cartolina non si rivelò l'annuncio della svolta che Bohr aveva sperato: Hardy stava giocando una delle sue partite con Dio.

Quando si era imbarcato sulla nave che attraverso il Mare del Nord l'avrebbe riportato dalla Danimarca in Inghilterra, il mare era insolitamente agitato. La nave stessa non era grandissima e Hardy cominciò a temere per la propria vita. Perciò si procurò una polizza d'assicurazione davvero molto personale. Fu allora che spedì a Bohr la cartolina in cui gli annunciava quella finta scoperta. Se la prima passione della vita di Hardy era quella di dimostrare l'ipotesi di Riemann,

la seconda era senza dubbio la sua guerra con Dio. Sapeva che Dio non avrebbe mai consentito alla nave di affondare e di lasciare così al mondo l'impressione che Hardy e la sua presunta dimostrazione fossero affogati e perduti per sempre. Il piano di Hardy funzionò, ed egli giunse sano e salvo in Inghilterra.

Probabilmente è corretto affermare che la passione maniacale di Hardy per l'ipotesi di Riemann, combinata al carattere pittoresco e carismatico del matematico inglese, contribuì a portarla in cima all'elenco dei problemi più ambiti della matematica. L'espressivo stile di scrittura di Hardy, che trova una manifestazione esemplare nell'*Apologia di un matematico*, ebbe un ruolo decisivo per promuovere l'importanza della teoria dei numeri e di quello che egli considerava il problema centrale in quel campo. Una cosa sorprendente è che, con tutto il parlare che Hardy fa nell'*Apologia* di bellezza ed estetica in matematica, la bellezza delle dimostrazioni di cui egli stesso ebbe il merito è spesso oscurata dalla massa di dettagli tecnici necessari per portarle fino alla loro conclusione. Il più delle volte il successo non era tanto il frutto di una grande idea quanto piuttosto di un duro, lungo lavoro.

Il libro che accese in Hardy il desiderio di diventare un matematico non aveva nulla a che vedere con la matematica. Era una storia che riguardava le delizie della vita alla Tavola alta del Trinity College. Ad affascinarlo fu una descrizione dei *fellows* che bevevano porto nella Senior Combination Room, la sala comune loro riservata. L'aveva letta nel romanzo *A Fellow of Trinity*. Hardy ammise di aver scelto di

studiare matematica perché «è la sola e unica cosa che so fare bene [...] Finché non la ottenni, per me la matematica significò prima di tutto una *fellowship* al Trinity».

Per arrivarci, dovette sottoporsi all'estenuante sequela di esami che il sistema universitario di Cambridge richiedeva. In seguito Hardy comprese che una conseguenza nefasta dell'enfasi posta da quel sistema di esami sulla risoluzione di problemi tecnici ed enigmi matematici era il fatto che pochi, persino dopo aver ottenuto una laurea in matematica, si rendevano conto di quale ne fosse la vera essenza. Nel 1904 uno dei professori di Gottinga fece una parodia del tipo di problemi che gli studenti inglesi dovevano risolvere: «Su un ponte elastico sta un elefante di massa trascurabile; sulla sua proboscide è posata una zanzara di massa *m*. Calcolare le vibrazioni del ponte quando l'elefante sposta la zanzara facendo ruotare la proboscide». Agli studenti si richiedeva di citare i *Principia* di Newton come se fossero la Bibbia. La conoscenza dei risultati si basava sulla loro posizione sulla pagina piuttosto che sul loro vero significato. Secondo Hardy quel sistema contribuì a prolungare il periodo in cui la Gran Bretagna si ridusse a un deserto matematico. Ai matematici inglesi veniva insegnato a suonare le loro scale musicali sempre più in fretta, ma essi rimanevano completamente all'oscuro della stupenda musica matematica che avrebbero potuto eseguire una volta che avessero padroneggiato quelle scale.

Hardy attribuiva la propria illuminazione matematica al libro del matematico francese Camille Jordan *Course d'Analyse*, che gli aprì gli occhi sulla matematica che stava fio-

rendo sul continente. «Non dimenticherò mai la meraviglia con cui lessi quell'opera straordinaria [...] e mentre la leggevo capii per la prima volta che cosa significasse davvero la matematica.»

Nel 1900, la nomina a *fellow* del Trinity College liberò Hardy dal fardello di sostenere esami e gli diede la libertà di esplorare il mondo reale della matematica.

Littlewood, il bullo della matematica

Nel 1910 Hardy fa raggiunto al Trinity College da un matematico di otto anni più giovane di lui, J.E. Littlewood. Avrebbero passato i trentasette anni successivi come una sorta di Scott e Oates della matematica, una coppia di intrepidi e inseparabili esploratori del mondo dei numeri, inoltrandosi nella nuova terra a cui sul continente erano state aperte le porte. La loro collaborazione produsse quasi cento pubblicazioni. Bohr era solito scherzare dicendo che in quel periodo c'erano tre grandi matematici inglesi: Hardy, Littlewood e Hardy-Littlewood.

Ciascuno dei due matematici contribuiva con le proprie specifiche qualità alla collaborazione. Littlewood era il bullo che quando andava all'assalto di un problema lo faceva con i fucili spianati. Per lui il godimento era mettere in ginocchio un problema difficile. Hardy, al contrario, dava valore alla bellezza e all'eleganza. Questa complementarità si trasferiva invariabilmente alla stesura dei loro saggi. Hardy prendeva

le bozze buttate giù da Littlewood e vi aggiungeva quello che essi chiamavano il «gas» per produrre la prosa elegante che non mancava mai di accompagnare le loro dimostrazioni.

Hardy e Littlewood al Trinity College di Cambridge nel 1924.

È curioso come gli stili di questi due matematici si rispecchiassero nella loro apparenza fisica. Hardy era un bell'uomo, uno di quelli il cui aspetto conserva il marchio della giovinezza ben oltre la data di scadenza. Nei primi giorni dopo la sua elezione a *fellow* del Trinity College veniva spesso affrontato dal personale della Senior Combination Room, che

lo scambiava per uno studente perdutosi nel labirinto dei corridoi del college. Littlewood aveva lineamenti tagliati con l'accetta, «un vero personaggio dickensiano», come osservò un matematico. Era forte e agile di mente e di corpo. Come Hardy amava il cricket ed era un battitore spietato. La sua altra passione era la musica, per la quale Hardy non provava invece alcuna attrazione. Da adulto imparò da solo a suonare il pianoforte. Provava un amore profondo per la musica di Bach, Beethoven e Mozart. Pensava che la vita fosse troppo breve per sprecarla con compositori di minore importanza.

L'altra cosa che li separava era la sessualità. Si sapeva che molto probabilmente Hardy era omosessuale. Tuttavia egli era molto discreto al riguardo, anche se a Cambridge l'omosessualità era quasi più accettabile del matrimonio. Quella era un'epoca in cui i professori di Oxford e Cambridge avrebbero dovuto rinunciare alla *fellowship* se mai si fossero sposati. Littlewood affermò che Hardy era un «omosessuale non praticante». A detta di tutti lui era invece una specie di dongiovanni. Benché in questo campo non raggiungesse i livelli di Hilbert, entrò in rapporti molto intimi con la moglie di un medico del luogo, con cui passava le vacanze estive in Cornovaglia. Molti anni dopo, guardandosi allo specchio, uno dei figli della donna fece un commento sulla propria straordinaria somiglianza con lo zio John. «Non c'è niente di sorprendente» rispose lei. «È tuo padre.»

Come si confà a due matematici, la collaborazione di Hardy e Littlewood poggiava su fondamenta assiomatiche molto chiare:

Assioma 1: Non importava se ciò che si scrivevano l'un l'altro era giusto o sbagliato.

Assioma 2: Non c'era alcun obbligo di rispondere a una lettera spedita da uno all'altro. Non c'era nemmeno l'obbligo di leggerla.

Assioma 3: I due dovevano cercare di non occuparsi delle stesse cose.

E poi c'era l'assioma più importante di tutti:

Assioma 4: Per evitare ogni discussione, tutti i loro saggi scientifici avrebbero portato la loro firma congiunta, indipendentemente dal fatto che uno di loro avesse dato o meno un qualche contributo alla sua stesura.

Bohr riassunse così la loro relazione: «Non vi fu mai una collaborazione tanto importante e cordiale che fosse fondata su assiomi in apparenza tanto negativi». Ancora oggi i matematici parlano di «giocare in base alle regole di Hardy-Littlewood» quando svolgono un lavoro insieme. Bohr scoprì che Hardy teneva fede al secondo assioma quando collaborava con lui a Copenhagen. Ricordava le voluminose lettere di argomento matematico di Littlewood che arrivavano ogni giorno, e Hardy che imperturbabile le gettava in un angolo della stanza commentando sprezzante: «Suppongo che dovrò leggerle un giorno o l'altro». Quando era a Copenhagen, una cosa sola occupava la mente di Hardy: l'ipotesi di Riemann. A meno che Littlewood non gli avesse spedito una dimostrazione dell'ipotesi, le sue lettere erano destinate a finire in un angolo.

Secondo ciò che riferisce Harold Davenport, uno studente di Littlewood, poco mancò che l'ipotesi di Riemann provocasse una rottura fra Hardy e Littlewood. Hardy aveva scritto un romanzo giallo in cui un matematico dimostrava l'ipotesi di Riemann solo per essere assassinato da un altro matematico che poi si attribuiva la paternità della dimostrazione. Littlewood era fuori di sé. Il problema non era che Hardy avesse violato l'assioma 4 venendo meno all'obbligo di citarlo come coautore della storia. Littlewood era convinto che il personaggio dell'assassino fosse modellato su di sé, e fece in modo che il manoscritto non vedesse la luce del sole. Hardy cedette, e la matematica fu privata di quel piccolo gioiello letterario.

Littlewood aveva fatto la gavetta confuso fra la massa degli studenti di matematica di Cambridge, eseguendo tutti gli stratagemmi richiesti dal sistema di esami. Riuscì a issarsi fino al vertice della scala guadagnandosi il titolo molto ambito di *senior wrangler*,* che condivise con un altro studente, Mercer. A Cambridge i *senior wranglers* erano delle celebrità, tanto che alla fine dell'anno accademico venivano messe in vendita le loro fotografie. Probabilmente i compagni di studi di Littlewood avevano già intuito che quello sarebbe stato solo l'inizio di una carriera straordinaria. Quando un amico provò a comprare una delle sue fotografie si sentì rispondere: «Temo che Mr. Littlewood sia andato esaurito, ma abbiamo ancora un bel po' di Mr. Mercer».

* Titolo riservato a chi si laurea in matematica a Cambridge con il massimo dei voti e la lode. [N.d.T.]

Littlewood si rendeva conto che gli esami universitari avevano ben poco a che fare con la vera essenza della matematica, che erano semplicemente dei giochini tecnici che gli veniva richiesto di eseguire e vincere prima di poter passare alla fase successiva. «I giochi che facevamo mi venivano facili e anzi provavo una certa soddisfazione nel mettere in pratica con successo quell'abilità.» Non vedeva l'ora di mettere a frutto quell'arte imparata da studente per scopi più creativi. La sua introduzione alla ricerca matematica sarebbe stata una specie di battesimo del fuoco.

Fresco d'esami, Littlewood era impaziente di sfruttare le lunghe vacanze estive per buttarsi anima e corpo nella ricerca. Chiese al suo *tutor*, Ernest Barnes, un problema adatto su cui potesse farsi le ossa. Barnes, che in seguito sarebbe diventato vescovo di Birmingham, ci rifletté sopra un po' e si ricordò di un'interessante funzione con cui ancora nessuno si era davvero misurato. Magari Littlewood avrebbe potuto verificare dove quella funzione andava a zero. Barnes scrisse una definizione della funzione perché Littlewood la portasse con sé per l'estate. «Si chiama funzione zeta» disse Barnes con aria innocente. Littlewood uscì dall'ufficio con il foglio in mano, ignaro di quello che Barnes gli aveva appena suggerito, e cioè che avrebbe trascorso l'estate cercando di dimostrare l'ipotesi di Riemann.

Barnes non aveva spiegato a Littlewood quale fosse il fondale storico in cui si inquadrava il problema, cosa che ne avrebbe rivelato la difficoltà. Probabilmente il *tutor* di Littlewood era anche all'oscuro dell'esistenza di un nesso fra gli

zeri della funzione zeta e i numeri primi, e riteneva semplicemente quel problema interessante: dov'è che questa funzione produce un valore uguale a zero? Peter Sarnak, una delle figure di riferimento nei tentativi moderni di dimostrare l'ipotesi di Riemann, spiega: «In effetti era la sola funzione analitica che, mentre entravamo nel XX secolo, i matematici non comprendevano ancora». Come osservò alla commemorazione funebre di Littlewood Sir Peter Swinnerton-Dyer, che era stato uno dei suoi studenti, il fatto che «Barnes ritenesse che [l'ipotesi di Riemann] fosse adatta a uno studente ricercatore, sia pure il più brillante, e che Littlewood avrebbe dovuto affrontarlo senza esitazioni», la dice lunga sullo stato disastroso in cui languiva la matematica inglese prima che Hardy e Littlewood esercitassero il loro influsso positivo.

Littlewood combatté per tutta l'estate, cimentandosi con il problema dall'aspetto innocente che Barnes gli aveva affidato. Anche se i suoi tentativi di individuare gli zeri non ebbero alcun successo, ciò in cui si imbatté lo riempì di soddisfazione. Proprio come aveva scoperto Riemann una cinquantina d'anni prima, Littlewood capì che quegli zeri potevano rivelare qualcosa sui numeri primi. Benché sul continente ciò fosse noto fin dai tempi di Riemann, in Inghilterra il nesso fra la funzione zeta e i numeri primi non era ancora stata ben compresa. Littlewood era elettrizzato da quella che credeva fosse una connessione inedita e nel settembre del 1907 scrisse una relazione al riguardo per la dissertazione con cui si candidava a una borsa di ricerca come *fellow* al Trinity.

Il fatto che Littlewood ritenesse la propria scoperta originale è un'ulteriore conferma di quanto fosse isolata la matematica inglese.

Hardy, che era uno dei pochi in Inghilterra a essere informato sui recenti progressi compiuti da Hadamard a de la Vallée-Poussin, sapeva che quel risultato non era originale come Littlewood aveva sperato. Ma ne riconobbe le potenzialità, e nonostante quell'anno Littlewood non riuscisse a farsi nominare *fellow* del college, fu stretto un patto fra gentiluomini con cui si garantiva la sua nomina alla prima occasione utile. Littlewood raggiunse Hardy al Trinity College nell'ottobre 1910.

Ora che apriva le proprie porte alle influenze della tradizione intellettuale d'oltremanica, Cambridge stava cominciando a fiorire. Viaggiare fra il continente e l'Inghilterra stava diventando più agevole, e Hardy e altri accademici si sforzavano di visitare molti dei centri culturali europei. I nuovi contatti che essi stabilirono favorirono l'afflusso di riviste, libri e idee nuove dall'estero. Il Trinity College, in particolare, divenne una comunità straordinariamente vibrante nei primi anni del XX secolo. La Senior Combination Room non era più un club per gentiluomini, ma un luogo di ricerca. La conversazione alla Tavola alta non si limitava al porto e al chiaretto ma era pervasa delle idee più nuove. Al college, oltretutto, lavoravano accanto a Hardy e Littlewood i due filosofi più eminenti attivi in Inghilterra: Bertrand Russell e Ludwig Wittgenstein. Entrambi erano alle prese con quegli stessi problemi relativi alle fondamenta logiche della mate-

matica che tanto avevano interessato Hilbert. E Cambridge vibrava d'eccitazione per i grandi progressi compiuti in fisica da J.J. Thomson, a cui venne assegnato un premio Nobel per la scoperta dell'elettrone, e ad Arthur Eddington, il quale aveva trovato conferma alla convinzione di Gauss e di Einstein che lo spazio fosse davvero curvo e non euclideo.

La grande collaborazione fra Hardy e Littlewood fu alimentata dal tempestivo arrivo di un libro di Landau sui numeri primi. Nel 1909, la pubblicazione della sua opera in due volumi *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* («Manuale della teoria della distribuzione dei numeri primi») convertì molti alle meraviglie dei nessi fra i numeri primi e la funzione zeta. Prima che comparisse il libro di Landau, la comunità matematica nel suo complesso era quasi tutta all'oscuro della storia di Riemann e dei numeri primi. Come Hardy riconobbe nel suo necrologio per Landau (scritto insieme a Hans Heilbronn), «il libro trasformò la materia, fino ad allora terreno di caccia di un manipolo di audaci eroi, in uno dei campi più fertili degli ultimi trent'anni». Nel 1914 sarebbe stato il libro di Landau a indurre Hardy a dimostrare che infiniti zeri giacevano sulla retta critica di Riemann. Motivato dalle esperienze fatte cimentandosi con la funzione zeta quand'era studente, anche Littlewood fu incoraggiato a dare il suo primo contributo importante alla materia.

Dimostrare un teorema che Gauss riteneva vero ma non era in grado di dimostrare è considerato un test probante della valentia di un matematico. Dimostrare la falsità di uno

di quei teoremi ti pone in un'altra categoria. Non capita spesso che un'intuizione avuta da Gauss si riveli sbagliata. Egli aveva prodotto una funzione, il logaritmo integrale Li(N), e aveva predetto che essa avrebbe fornito il numero di numeri primi non maggiori di N con una precisione crescente all'aumentare di N. Hadamard e de la Vallée-Poussin avevano scolpito i loro nomi nella storia della matematica dimostrando che Gauss aveva ragione. Ma Gauss aveva fatto una seconda congettura: che il suo logaritmo integrale avrebbe sempre *sovrastimato* il numero di numeri primi, cioè che non avrebbe mai predetto l'esistenza di meno numeri primi di quanti sono effettivamente compresi fra 1 e N. Ciò era in contrasto con il perfezionamento introdotto da Riemann, in cui i valori fluttuavano fra una sovrastima e una sottostima del vero numero di numeri primi.

Quando Littlewood cominciò a occuparsene, la correttezza della seconda congettura di Gauss era stata confermata per tutti i numeri fino a 10.000.000. Ai tempi di Gauss, qualsiasi scienziato sperimentale avrebbe accettato dieci milioni di testimonianze come una conferma assolutamente convincente dell'ipotesi di Gauss. Le scienze che non soffrivano di una fissazione maniacale per la dimostrazione e avevano più rispetto per i risultati sperimentali sarebbero state assolutamente soddisfatte di accettare la congettura di Gauss come una pietra angolare su cui cominciare a costruire nuove teorie. All'epoca di Littlewood, un centinaio d'anni dopo, era plausibile che l'edificio matematico si sarebbe elevato ben alto sopra queste fondamenta. Ma nel 1912 Littlewood

scoprì che, contrariamente alle previsioni, l'ipotesi di Gauss era un miraggio. Sotto il suo occhio indagatore quella pietra angolare si ridusse in polvere. Egli dimostrò che quando si prosegue a contare, prima o poi si raggiunge una regione numerica in cui il logaritmo integrale di Gauss passa da una sovrastima a una sottostima del vero numero di numeri primi.

Littlewood riuscì anche a demolire un'altra idea che stava diventando un punto fermo. Molti ritenevano che il perfezionamento apportato da Riemann alla stima del numero di numeri primi proposta da Gauss avrebbe prodotto sempre e comunque stime più precise. Littlewood dimostrò che, se è vero che il perfezionamento di Riemann appare più preciso quando si resta nell'ambito dei primi milioni di numeri, quando ci si spinge a distanze maggiori nell'universo dei numeri talvolta è la stima di Gauss a offrire la previsione più accurata.

A rendere particolarmente notevoli le scoperte di Littlewood era il fatto che il logaritmo integrale di Gauss comincia a fornire una sottostima del numero di numeri primi solo in regioni numeriche che probabilmente non raggiungeremo mai. Littlewood non era nemmeno in grado di prevedere quanto lontano dovremmo spingerci prima di poter osservare qualcuno di questi fenomeni. Di fatto, a tutt'oggi nessuno è riuscito a proseguire nel conteggio abbastanza per raggiungere una regione numerica in cui il logaritmo integrale di Gauss dà una sottostima dei numeri primi. Se possiamo avere la certezza del fatto che a un certo punto la predizione originaria di Gauss risulterà falsa, è solo grazie all'a-

nalisi teorica di Littlewood e al potere della dimostrazione matematica.

Qualche anno più tardi, nel 1933, uno studente perfezionando di Littlewood di nome Stanley Skewes stimò che solo quando si fossero contati i numeri primi non inferiori a $10^{10^{10^{34}}}$ sarebbe stato finalmente possibile essere testimoni diretti di una sottostima del numero di numeri primi da parte del logaritmo integrale di Gauss. Questo è un numero assurdamente grande. Gli incontri con numeri molto grandi spesso inducono a fare confronti col numero di atomi esistenti nell'universo visibile, che secondo le migliori stime dovrebbe aggirarsi attorno a 10^{78}; ma il numero suggerito da Skewes rende vano persino un tale confronto. È un numero che comincia con 1 e poi prosegue con così tanti zeri che se anche voi scriveste uno zero su ogni atomo dell'universo non lo avvicinereste nemmeno di un passo. Hardy avrebbe dichiarato che il numero di Skewes, come fu battezzato, era senza ombra di dubbio il più grande numero che fosse mai stato preso in considerazione in una dimostrazione matematica.

La dimostrazione della stima di Skewes era interessante per un altro motivo: è una delle molte migliaia di dimostrazioni che cominciano con la premessa «supponiamo che l'ipotesi di Riemann sia vera». Skewes poteva dare valore alla sua dimostrazione solo presumendo che la congettura di Riemann fosse corretta, cioè che tutti i punti al livello del mare nel paesaggio zeta si trovino effettivamente sulla retta passante per $\frac{1}{2}$. Senza quell'assunto, negli anni Trenta del secolo scorso i matematici non erano in grado di dire con cer-

tezza quanto in là ci si sarebbe dovuti spingere a contare prima di scoprire che il logaritmo integrale di Gauss dava una sottostima del numero di numeri primi. In questo caso specifico, tuttavia, alla fine i matematici trovarono un modo per evitare di dover oltrepassare la vetta del monte Riemann. Lo stesso Skewes individuò un numero ancora più grande che sarebbe rimasto valido anche se l'ipotesi di Riemann si fosse rivelata falsa.

Il fatto curioso era che, in contrasto con la loro riluttanza ad accettare la seconda congettura di Gauss, la fiducia dei matematici nella validità dell'ipotesi di Riemann cominciava a essere abbastanza salda da convincerli a edificare su di essa benché non fosse ancora stata dimostrata. Ormai l'ipotesi di Riemann stava diventando una componente strutturale essenziale dell'edificio matematico. Ma probabilmente era una questione di pragmatismo almeno tanto quanto di fiducia. Un numero crescente di matematici si trovava a dover fare i conti con l'ipotesi di Riemann perché ostacolava i loro progressi. Solo presupponendo che fosse vera avevano la possibilità di procedere. Ma come Littlewood ha chiarito nel caso della seconda congettura di Gauss, i matematici devono essere pronti a un eventuale crollo di tutto ciò che si è costruito sull'ipotesi di Riemann, se qualcuno dovesse scoprire un solo zero della funzione zeta che non cade sulla retta critica.

La dimostrazione di Littlewood ebbe un effetto psicologico molto forte sulla percezione della matematica e in particolare sul modo di guardare ai numeri primi. Essa inviò un secco avvertimento a chiunque si lasciava impressionare da

un grande accumulo di indizi. Rivelava che i numeri primi erano maestri del camuffamento. Questi numeri celano i loro veri colori nei più profondi recessi dell'universo numerico, tanto in profondità che essere testimoni oculari della loro autentica natura va probabilmente oltre le capacità di calcolo degli uomini, cosicché è possibile osservare il loro reale comportamento solo attraverso gli occhi penetranti della dimostrazione matematica astratta.

La dimostrazione di Littlewood fornì anche le munizioni ideali per coloro che sostenevano che fra la matematica e le altre scienze c'era una differenza sostanziale. I matematici non potevano più accontentarsi dello sperimentalismo proprio della matematica del XVII e del XVIII secolo, in cui si avanzavano teorie dopo aver compiuto pochi calcoli. L'empirismo non era più un veicolo adatto per l'esplorazione del mondo matematico. Nelle altre scienze, milioni di dati potevano costituire una prova sufficiente su cui basare una teoria, ma Littlewood aveva mostrato che in matematica questo significava muoversi su un terreno minato. D'ora in poi, la dimostrazione sarebbe stata tutto. Senza una prova incontrovertibile, non si poteva essere certi di nulla.

Mentre aumentava il numero di matematici che si vedevano costretti a presumere vera l'ipotesi di Riemann, diventava più imperativo che mai assicurarsi che in qualche area remota del paesaggio di Riemann non ci fossero zeri che si discostavano dalla retta critica. Finché non lo si fosse fatto, i matematici avrebbero sempre vissuto nel terrore che l'ipotesi di Riemann potesse dimostrarsi falsa.

6

Ramanujan, il mistico matematico

Un'equazione non significa nulla per me se non esprime un pensiero di Dio.

Srinivasa Ramanujan

Mentre Hardy e Littlewood si facevano strada a fatica attraverso lo strano paesaggio di Riemann, a cinquemila miglia di distanza, negli uffici della capitaneria di porto di Madras, in India, un giovane impiegato di nome Srinivasa Ramanujan aveva sviluppato un'ossessione per il mistero inebriante del flusso irregolare dei numeri primi. Invece di occuparsi del compito tedioso di tenere i registri contabili, per il quale era stato assunto, egli passava tutte le ore di veglia a riempire quaderni di osservazioni e calcoli alla ricerca di ciò che dettava il ritmo a quegli strani numeri. Ramanujan contava i numeri primi senza avere alcuna nozione della sofisticata prospettiva che era stata elaborata in Occidente. Privo di un'istruzione formale, non aveva il rispetto reverenziale che mostravano Hardy e Littlewood nei confronti della teoria dei

numeri e dei numeri primi in particolare, che Hardy definiva «il più difficile di *tutti* i rami della matematica pura». Svincolato da ogni tradizione matematica, Ramanujan si tuffò nei numeri primi con un entusiasmo quasi infantile. Il suo candore, combinato con una straordinaria predisposizione naturale per la matematica, si sarebbe rivelato la sua grande forza.

A Cambridge, Hardy e Littlewood studiavano avidamente la meravigliosa storia sui numeri primi che si dipanava nel libro di Landau. In India, l'ossessione di Ramanujan per i primi era stata ispirata da un libro molto più elementare, e con conseguenze di portata altrettanto vasta. Ci sono alcuni punti di svolta nella vita di un giovane scienziato che spesso è possibile identificare come fondamentali per il loro sviluppo futuro. Per Riemann fu il libro di Legendre che gli era stato donato quand'era uno scolaro. Quel libro piantò il seme che sarebbe germogliato in una fase successiva della sua vita. Per Hardy e Littlewood, il libro di Landau ebbe un'influenza altrettanto forte. Nel 1903, all'età di quindici anni, Ramanujan era stato ispirato dalla scoperta di una copia di *A Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics* di George Carr. Salvo che per il legame con Ramanujan, il libro di Carr e la vita del suo autore hanno scarsa importanza, ma per Ramanujan fu importante il modo in cui quel libro era strutturato. Era un elenco di circa 4.400 classici risultati matematici; solo i risultati, senza dimostrazioni. Ramanujan raccolse la sfida e trascorse gli anni seguenti a studiare a fondo il libro e a spiegare ciascuna delle asserzioni che esso riportava. Avendo ben poca familiarità con lo stile

occidentale di dimostrazione, Ramanujan fu costretto a creare una propria matematica. Il fatto di non essere ingabbiato nella camicia di forza dei modi di pensiero convenzionali gli dava la libertà di muoversi a proprio piacimento. E non ci volle molto perché i suoi quaderni si riempissero di idee e risultati che nel libro di Carr non comparivano.

Srinivasa Ramanujan (1887-1920).

Eulero si era fatto le ossa su molte delle asserzioni non dimostrate di Fermat. Nell'approccio di Ramanujan ai problemi matematici possiamo riconoscere lo stesso spirito di Eulero. Possedeva una capacità fantastica di intuire come girare e rigirare le formule finché non emergevano nuove prospet-

tive. Fu molto eccitato quando scoprì per proprio conto il collegamento fornito dai numeri immaginari fra la funzione esponenziale e le equazioni che descrivono le onde sonore. Ma la gioia si trasformò in disperazione quando, pochi giorni dopo, il giovane impiegato indiano scoprì che Eulero l'aveva preceduto di centocinquant'anni circa. Umiliato e avvilito, Ramanujan nascose i suoi calcoli sotto il soffitto di casa.

Nel migliore dei casi comprendere in che cosa consista la creatività matematica è difficile, ma il modo in cui procedeva Ramanujan ebbe sempre qualcosa di misterioso. Sosteneva che le idee gli venivano portate in sogno dalla dea Namagiri, protettrice della sua famiglia e consorte di Narasimha, il dio leone, quarta incarnazione di Vishnu. Altri nel villaggio di Ramanujan credevano che la dea avesse il potere di esorcizzare i demoni. Per Ramanujan Namagiri era la spiegazione dei lampi d'illuminazione che innescavano il suo flusso ininterrotto di scoperte matematiche.

Ramanujan non è l'unico esempio di matematico per il quale il mondo dei sogni si è rivelato un territorio fertile per l'esplorazione matematica. Dirichlet teneva le *Disquisitiones arithmeticae* sotto il cuscino, sperando di riceverne ispirazione nei propri sforzi di comprendere le asserzioni spesso criptiche che il libro conteneva. Nei sogni è come se la mente si affrancasse dalle costrizioni del mondo reale e fosse libera di esplorare strade che lo stato cosciente le preclude. Ramanujan sembrava in grado di indurre questo stato onirico nelle ore di veglia. Una simile trance è in effetti molto vicina allo stato mentale che buona parte dei matematici tenta di raggiungere.

Hadamard, che si era fatto un nome dimostrando il teorema dei numeri primi, era affascinato da ciò che si verifica nella mente di un matematico creativo. Mise le sue idee per iscritto in un libro intitolato *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, pubblicato nel 1945, in cui avanza tesi persuasive sul ruolo del subconscio. Oggi i neurologi si stanno interessando sempre più ai meccanismi della mente matematica, dato che potrebbero far luce sul funzionamento del cervello. Spesso sono i periodi di riposo o addirittura di sogno a concedere alla nostra mente la libertà di giocare con idee che si sono impiantate nel cervello durante un'attività intellettiva conscia.

Nel suo libro Hadamard divideva l'atto della scoperta matematica in quattro stadi: preparazione, incubazione, illuminazione e verifica. Se Ramanujan aveva un dono naturale per il terzo di questi stadi, era decisamente carente nel quarto. La sola illuminazione gli era sufficiente, ma non riusciva proprio a cogliere l'importanza della verifica. Forse era il fatto di non essere assillato dalla responsabilità della dimostrazione a concedergli la libertà di scoprire nuovi percorsi nella landa selvaggia della matematica. Il suo stile intuitivo era totalmente in contrasto con le tradizioni scientifiche dell'Occidente. Come scrisse in seguito Littlewood, «un'idea ben chiara di quello che s'intende per dimostrazione non la possedeva affatto; se dal totale miscuglio di indizi e d'intuizione traeva una certezza, non cercava oltre».

Le scuole indiane dovevano molto alle idee introdotte dall'Impero britannico. Tuttavia, il sistema didattico inglese

che era stato tanto utile a Hardy e a Littlewood non fu di alcun aiuto al giovane Ramanujan in India. Nel 1907, mentre la dissertazione di Littlewood riceveva un'accoglienza calorosa a Cambridge, Ramanujan falliva per la terza e definitiva volta gli esami di ammissione al college. Avrebbe certamente superato quegli esami se avessero riguardato soltanto la matematica, ma gli era richiesto anche lo studio dell'inglese, della storia, del sanscrito e persino della fisiologia. Bramino osservante, Ramanujan era rigorosamente vegetariano, e per lui anatomizzare rane e conigli era intollerabile. Ma la bocciatura, benché significasse che non avrebbe potuto iscriversi all'università di Madras, non estinse il fuoco matematico che bruciava dentro di lui.

Nel 1910 Ramanujan era ormai impaziente che le sue idee ricevessero una qualche forma di riconoscimento. In particolare, era eccitato dalla scoperta di una formula che sembrava fornire un conteggio straordinariamente preciso dei numeri primi. Da principio aveva sperimentato la frustrazione che quasi tutti provano quando tentano di addomesticare questa sequenza selvaggia di numeri. Ma Ramanujan sapeva quanto fossero fondamentali i numeri primi per la matematica e non abbandonò la convinzione che dovesse esistere una formula in grado di spiegarli. Credeva ancora, ingenuamente, che tutta la matematica e le sue strutture si potessero esprimere con esattezza per mezzo di equazioni e formule. Come ebbe a dire in seguito Littlewood, «quale grande matematico avrebbe potuto essere Ramanujan cento o centocinquant'anni fa? Che cosa sarebbe accaduto se fosse entrato in contatto con Eulero al

momento giusto? [...] Ma il grande periodo delle formule sembra ormai passato». Ramanujan, tuttavia, non era stato esposto al cambiamento di prospettiva indotto da Riemann. Era determinato a trovare una formula che producesse i numeri primi. Ed era ansioso di spiegare ciò che aveva scoperto fino ad allora a qualcuno che potesse apprezzare le sue idee.

L'impressione che suscitavano i suoi quaderni e l'influenza della rete braminica gli avevano garantito un impiego come contabile alla capitaneria di porto di Madras. Aveva anche cominciato a pubblicare alcune delle sue idee sul «Journal of the Indian Mathematical Society», e ormai il suo nome era giunto all'attenzione delle autorità britanniche. C.L.T. Griffith, che lavorava all'Istituto di ingegneria di Madras, riconobbe che l'opera di Ramanujan era quella di un «matematico notevole», ma non si sentiva in grado di seguirla o di criticarla. Decise perciò di richiedere l'opinione di uno dei professori che gli avevano insegnato matematica quand'era studente a Londra.

Privo di una preparazione formale, Ramanujan aveva elaborato uno stile matematico molto personale. Non è dunque sorprendente che, quando il professor Hill dello University College di Londra ricevette le carte in cui Ramanujan sosteneva di aver dimostrato che

$$1+2+3+\ldots+\infty=-\frac{1}{12}$$

ne liquidò buona parte come prive di senso. Persino a un occhio non qualificato questa formula appare ridicola. Som-

mare tutti i numeri interi e ottenere come risultato una frazione negativa è chiaramente l'opera di un pazzo! «Il signor Ramanujan è caduto nelle trappole del tema piuttosto difficile delle serie divergenti» scrisse il professore a Griffith.

Tuttavia, il giudizio di Hill non era totalmente negativo. Incoraggiato dai commenti che gli furono riferiti, Ramanujan decise di tentare la sorte e di scrivere direttamente a un certo numero di matematici di Cambridge. Due dei destinatari non riuscirono a penetrare il messaggio celato dietro la strana aritmetica di Ramanujan e declinarono la sua richiesta d'aiuto. Ma poi la lettera di Ramanujan arrivò sulla scrivania di Hardy.

La matematica sembra avere il potere di portare allo scoperto gli eccentrici. E forse una parte della responsabilità è da attribuire a Fermat. La lettera prestampata di rifiuto ideata da Landau testimonia di quante risposte assurde egli ricevesse da individui che rivendicavano il diritto a reclamare il premio Wolfskehl per aver risolto l'ultimo teorema di Fermat. I matematici sono abituati a ricevere lettere non richieste piene di folli teorie numerologiche. Hardy, per esempio, aveva fatto l'abitudine a venir sommerso da un diluvio di manoscritti i cui autori, come ricordava il suo amico C.P. Snow, affermavano di aver risolto i misteri profetici della Grande piramide o decifrato i crittogrammi che Francesco Bacone aveva celato nei drammi di Shakespeare.

Di recente Ramanujan aveva ricevuto una copia del libro di Hardy *Orders of Infinity* da Ganapathy Iyer, un professore di matematica di Madras con cui trascorreva le serate a di-

scutere di matematica sulla spiaggia. Mentre leggeva Hardy, Ramanujan dovette rendersi conto di aver trovato finalmente qualcuno che avrebbe potuto apprezzare le sue idee, ma in seguito ammise di aver temuto che le sue somme infinite avrebbero indotto Hardy «a farmi notare che la mia destinazione era il manicomio». C'era un'affermazione di Hardy che eccitava in modo particolare Ramanujan: «A oggi non è stata trovata un'espressione definita che fornisca il numero di numeri primi minori di un qualsiasi numero dato». Ramanujan aveva scoperto un'espressione che pensava catturasse quel numero con una precisione pressoché assoluta, e aveva un gran desiderio di scoprire che cosa pensasse Hardy della sua formula.

L'impressione immediata che ebbe Hardy quando trovò fra la posta del mattino la grossa busta di Ramanujan coperta di francobolli indiani non fu favorevole. Dentro c'era un manoscritto pieno di teoremi bizzarri, deliranti, sul conteggio dei numeri primi, insieme a risultati ben noti presentati come se fossero scoperte originali. Nella lettera di accompagnamento Ramanujan dichiarava di aver «trovato una funzione che dà una rappresentazione esatta del numero di numeri primi». Hardy sapeva che quella era un'affermazione sbalorditiva, ma nel manoscritto non compariva nessuna formula. Peggio ancora, non si dimostrava nulla! Per Hardy, la dimostrazione era tutto. Una volta, conversando con Bertrand Russell alla Tavola alta del Trinity College, disse: «Se io riuscissi a dimostrare con la logica che tu morirai entro cinque minuti, sarei addolorato per la tua morte imminen-

te, ma il mio dolore sarebbe molto mitigato dal piacere della dimostrazione».

Secondo C.P. Snow, dopo aver dato una scorsa veloce al lavoro di Ramanujan, Hardy «non era solo annoiato, ma anche irritato. Sembrava che fosse una sorta di curioso imbroglio». Ma prima di sera quei folli teoremi cominciarono a esercitare la loro malia e Hardy convocò Littlewood per discuterne dopo cena. Per mezzanotte ne erano venuti a capo. Armati delle conoscenze necessarie per decifrare il linguaggio non convenzionale di Ramanujan, ora Hardy e Littlewood si rendevano conto che quelle non erano le esternazioni di uno spostato ma l'opera di un genio, di un matematico privo di una preparazione formale ma senza alcun dubbio brillante.

Entrambi compresero che la somma infinita apparentemente insensata di Ramanujan altro non era se non la riscoperta del metodo per definire la parte mancante del paesaggio zeta di Riemann. La chiave per decodificare la formula di Ramanujan è esprimere il numero 2 come $1/2^{-1}$ (2^{-1} è un altro modo di scrivere $\frac{1}{2}$). Applicando lo stesso trucco a ogni numero della somma infinita, Hardy e Littlewood riscrissero la formula di Ramanujan nella forma seguente:

$$1+2+3+\ldots+n+\ldots=1+\frac{1}{2^{-1}}+\frac{1}{3^{-1}}+\ldots+\frac{1}{n^{-1}}+\ldots=-\frac{1}{12}$$

Quella che si trovavano davanti era la soluzione di Riemann per il calcolo della funzione zeta quando vi si inseriva il numero −1. Senza un'istruzione formale, Ramanujan ave-

va compiuto l'intero percorso da solo e aveva ricostruito la scoperta del paesaggio zeta compiuta da Riemann.

La lettera di Ramanujan non avrebbe potuto giungere in un momento migliore. Grazie al libro di Landau, Littlewood e Hardy si erano lasciati affascinare dalle meraviglie della funzione zeta di Riemann e delle sue connessioni con i numeri primi. Ed ecco che Ramanujan sosteneva di avere una formula incredibilmente precisa per calcolare il numero dei numeri primi entro un qualsiasi intervallo numerico dato. Quella stessa mattina Hardy aveva respinto quell'affermazione, convinto che Ramanujan fosse uno dei tanti spostati che si dedicavano alla matematica. Ma il lavoro serale aveva posto quella busta proveniente dall'India in una luce completamente diversa.

Hardy e Littlewood dovettero rimanere di sasso di fronte all'affermazione di Ramanujan secondo cui la sua formula permetteva di calcolare il numero di numeri primi fino a 100.000.000 «in genere senza alcun errore e in alcuni casi con un errore di 1 o di 2». Il problema era che non veniva fornita alcuna formula. In effetti, tutta quanta la lettera era profondamente frustrante per i due matematici, dato che per loro una dimostrazione era assolutamente fondamentale. Le formule e le asserzioni che riempivano la lettera, invece, non venivano mai giustificate, né veniva spiegato da dove arrivassero.

Hardy rispose a Ramanujan in termini molto positivi, pregandolo di inviare delle dimostrazioni e maggiori dettagli sulle formule relative ai numeri primi. Littlewood aggiunse una

nota per chiedere che fosse spedita la formula per i numeri primi e «quanta più dimostrazione possibile senza indugi». I due matematici fremevano in previsione della risposta di Ramanujan. Trascorsero molte cene alla Tavola alta cercando di decifrare altre parti della sua prima lettera. Bertrand Russell scrisse a un amico di aver trovato «nella Hall Hardy e Littlewood in uno stato di grande agitazione, perché ritenevano di aver scoperto un secondo Newton, un impiegato indù di Madras con uno stipendio di 20 sterline all'anno».

Puntuale arrivò una seconda lettera di Ramanujan. Conteneva varie formule per calcolare il numero dei numeri primi ma era ancora priva di dimostrazioni. «Com'è esasperante la sua lettera a causa di ciò» scrisse Littlewood, e proseguì ipotizzando che forse Ramanujan temeva che Hardy avesse intenzione di sottrargli le sue scoperte. Studiando questa seconda lettera, Hardy e Littlewood scoprirono che Ramanujan aveva concepito un'altra delle scoperte fondamentali di Riemann. Il perfezionamento della formula di Gauss per il conteggio dei numeri primi introdotto da Riemann era molto preciso, e inoltre Riemann aveva scoperto come usare gli zeri del paesaggio zeta per eliminare gli errori che la sua formula ancora produceva. Letteralmente dal nulla Ramanujan aveva ricostruito una parte della formula ideata da Riemann cinquant'anni prima. La formula di Ramanujan comprendeva il perfezionamento di Riemann della stima del numero dei primi data da Gauss, ma non le correzioni che Riemann aveva ottenuto utilizzando gli zeri del suo paesaggio.

Ramanujan stava forse dicendo che gli errori prodotti dai

punti a livello del mare si cancellavano a vicenda in modo miracoloso? Fourier aveva fornito un'interpretazione musicale di quegli errori. Ciascuno zero è come un diapason, e quando vibrano tutti insieme questi diapason creano il suono dei numeri primi. Talvolta le onde sonore possono combinarsi per produrre il silenzio se si cancellano a vicenda. In un aeroplano si riduce il frastuono dei motori creando delle onde sonore all'interno della cabina per contrastarlo. Ramanujan stava forse affermando che le onde di Riemann dovute agli zeri avrebbero potuto produrre silenzio?

Durante le vacanze di Pasqua, Littlewood partì per la Cornovaglia insieme all'amante e alla famiglia di lei portando con sé una copia della lettera di Ramanujan. «Caro Hardy» scrisse (i due non si chiamavano mai l'un l'altro per nome di battesimo) «la faccenda dei numeri primi è sbagliata.» Littlewood era riuscito a dimostrare che in nessun modo gli errori dovuti a quelle onde avrebbero potuto cancellarsi a vicenda per giustificare ciò che affermava Ramanujan, e cioè che la sua ricostruzione della formula di Riemann era precisa quanto lui sosteneva. Ci sarebbe sempre stato del rumore, per quanto in là ci si spingesse a contare.

Si dà il caso che l'analisi di Littlewood stimolata dalla lettera di Ramanujan portò a una nuova intuizione interessante sull'opera compiuta da Riemann. L'ipotesi di Riemann era importante per i matematici perché implicava che la differenza fra la stima di Gauss e il vero numero di numeri primi compresi fra 1 e N sarebbe risultata molto piccola rispetto a N; in sostanza non sarebbe mai stata maggiore della ra-

dice quadrata di *N*. Ma se anche un solo zero non si fosse trovato sulla retta magica di Riemann, allora l'errore sarebbe stato maggiore. Adesso la lettera di Ramanujan sembrava suggerire che era possibile far meglio di Riemann. Poteva darsi che, proseguendo a contare i numeri primi, l'errore sarebbe diventato ancora più piccolo della radice quadrata di *N*. Il lavoro di Littlewood in Cornovaglia aveva stroncato quella speranza. Littlewood riuscì a dimostrare che in un numero infinito di casi l'errore prodotto dagli zeri sarebbe risultato almeno grande quanto la radice quadrata di *N*. L'ipotesi di Riemann rappresentava lo scenario ottimale. Ramanujan si era semplicemente sbagliato, ma Hardy rimase comunque impressionato. Come scrisse in seguito, «non sono sicuro che da un certo punto di vista questo suo fallimento non sia stato più meraviglioso di tutti i suoi trionfi».

«Ho una vaga teoria riguardo all'origine dei suoi errori.» Nella sua lettera a Hardy, Littlewood ipotizzava che Ramanujan credesse erroneamente che nel paesaggio zeta non ci fossero punti a livello del mare. Se fosse stato effettivamente così, allora in effetti le formule di Ramanujan sarebbero risultate esatte. Ciononostante Littlewood era eccitato. «Posso ritenere che egli sia quanto meno un Jacobi» dichiarò, paragonando Ramanujan a una delle celebrità fra i matematici della generazione di Riemann. Hardy scrisse a Ramanujan: «Aver dimostrato ciò che lei sostiene sarebbe stata l'impresa matematica più straordinaria dell'intera storia della matematica». Era chiaro che, benché traboccasse di talento, Ramanujan aveva un disperato bisogno di essere aggiornato sullo

stato attuale delle conoscenze. Littlewood scrisse a Hardy a proposito della sua intuizione: «Non sorprende che sia finito in trappola, ignaro come presumibilmente è della diabolica malignità insita nei primi». Come osservò Hardy, «aveva un handicap impossibile da superare, un indù povero e solitario che si misurava intellettualmente con la saggezza accumulata in Europa».

Si risolsero a fare tutto quanto fosse necessario per portare Ramanujan a Cambridge. Inviarono in India E.H. Neville, un *fellow* del Trinity College, affinché convincesse Ramanujan a unirsi a loro. Da principio Ramanujan era riluttante a lasciare l'India perché, essendo un bramino osservante, credeva che attraversare i mari avrebbe fatto di lui un paria. Un amico, Narayana Iyer, si rese conto che Ramanujan agognava di andare a Cambridge ed escogitò un piano. Iyer era convinto che la devozione di Ramanujan per la matematica e per la dea Namagiri insieme potessero produrre una rivelazione che lo avrebbe persuaso a partire per Cambridge. Lo portò al tempio di Namagiri a cercare ispirazione divina. Dopo tre notti passate a dormire sul pavimento di pietra del tempio, Ramanujan si destò di soprassalto e si affrettò a scuotere l'amico dal sonno. «Ho visto in un lampo di luce splendente Namagiri che mi ordinava di attraversare il mare.» Iyer sorrise. Il suo piano aveva funzionato.

Ramanujan temeva anche che la sua famiglia non fosse d'accordo. Ma Namagiri, la divinità che la proteggeva, doveva intervenire di nuovo. La madre di Ramanujan sognò che suo figlio era seduto in una grande sala circondato da euro-

pei e che la dea Namagiri le aveva ordinato di non ostacolarlo. A preoccuparlo, infine, era la prospettiva di essere sottoposto ad altri esami umilianti quando fosse arrivato a Cambridge. Neville riuscì a dissipare quest'ultimo timore. Ormai tutto era pronto perché Ramanujan lasciasse la caotica distesa di minuscole case che era Madras per gli imponenti saloni e le grandi biblioteche di Cambridge, lo scenario sognato da sua madre.

Contrasto culturale a Cambridge

Nel 1914 Ramanujan arrivò a Cambridge, ed ebbe così inizio una delle grandi collaborazioni della storia della matematica. Hardy parlò sempre in modo appassionato del periodo in cui lavorò con Ramanujan. Traevano piacere l'uno dalle idee matematiche dell'altro, lieti di aver trovato uno spirito affine con il quale condividere il loro amore per i numeri. In seguito Hardy avrebbe ripensato a quegli anni come ad alcuni fra i più felici della sua vita, e avrebbe parlato della relazione con Ramanujan in toni toccanti, definendola «l'unica vicenda romantica della mia vita».

Il sodalizio di Hardy e Ramanujan faceva pensare alla classica squadra investigativa che conduce un interrogatorio, una squadra in cui c'è un buono e c'è un cattivo. Il buono è l'eterno ottimista pieno di proposte folli. Il cattivo è il pessimista, che dubita di tutto e vede la carta sparire nella manica. Ramanujan aveva bisogno che Hardy il critico tenesse a

bada il suo entusiasmo mentre interrogavano il loro sospetto matematico.

Trovare un terreno comune, tuttavia, non era sempre facile. C'era sicuramente un contrasto culturale. Mentre Hardy e Littlewood pretendevano dimostrazioni rigorose, nello stile occidentale, i teoremi di Ramanujan si riversavano semplicemente fuori, ispirati dalla dea Namagiri. Spesso Hardy e Littlewood non riuscivano proprio a capire da dove uscissero le idee del loro nuovo collega. Hardy osservò: «Sembrava ridicolo angustiarlo domandandogli come avesse scoperto questo o quel problema noto, quando lui me ne mostrava una mezza dozzina di nuovi quasi ogni giorno».

Ramanujan non doveva vedersela soltanto con lo shock cultural-matematico. Era solo in un mondo alieno fatto di tocchi e toghe nere. Non riusciva a trovare cibo vegetariano e scriveva a casa per farsi spedire pacchi di tamarindo e olio di noci di cocco. Se non ci fosse stato il mondo a lui familiare della matematica, la transizione si sarebbe probabilmente rivelata impossibile. Neville, il *fellow* che si era conquistato la sua fiducia in India, descrisse quei primi giorni: «Soffriva le piccole pene della vita in una civiltà straniera, il gusto sgradevole di verdure a cui non era avvezzo, le scarpe che gli tormentavano i piedi che per ventisei anni aveva avuto liberi. Ma era un uomo felice, che trovava gioia nella società matematica in cui stava facendo il suo ingresso». Lo si poteva vedere ogni giorno camminare goffo in ciabatte nel cortile interno del college, avendo rinunciato per disperazione a indossare le sue scarpe inglesi. Ma una volta acco-

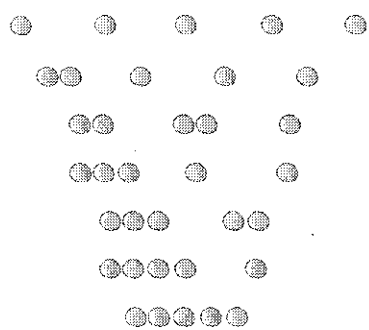
modatosi nell'ufficio di Hardy, i suoi quaderni aperti davanti a sé, poteva rifugiarsi nelle sue formule e nelle sue equazioni, mentre Hardy lo fissava, preso nella rete dei suoi magici teoremi. Ramanujan era passato dall'isolamento matematico dell'India alla solitudine culturale di Cambridge, ma aveva guadagnato un compagno con il quale esplorare il suo mondo matematico.

Hardy scoprì che dare un'educazione matematica a Ramanujan era una vera e propria impresa di equilibrismo. Temeva che se avesse tentato con troppa insistenza di costringere Ramanujan a consumare energie nella dimostrazione dei suoi risultati avrebbe potuto «distruggere la sua fiducia in se stesso o spezzare l'incantesimo della sua ispirazione». Affidò a Littlewood il compito di farlo familiarizzare con il rigore della matematica occidentale. Littlewood scoprì che era un compito virtualmente impossibile. Qualunque cosa egli tentasse di presentare a Ramanujan, otteneva in risposta una valanga di idee originali che lo bloccavano seduta stante.

Benché i tentativi di Ramanujan di produrre formule esatte per il conteggio dei numeri primi avesse contribuito a far partire la sua nave per l'Inghilterra, fu in campi correlati che alla fine egli lasciò il proprio segno. La lettura dei commenti pessimistici di Hardy e Littlewood sulla malignità dei numeri primi l'aveva dissuaso dall'affrontarli in modo diretto. Si possono solo fare speculazioni su ciò che Ramanujan avrebbe potuto scoprire se non gli si fosse trasmessa la paura dell'Occidente per i numeri primi. Insieme a Hardy, comunque, Ramanujan continuò la sua esplorazione di pro-

prietà dei numeri correlate. Le idee che lui e Hardy elaborarono avrebbero contribuito al primo passo avanti sulla strada di una dimostrazione della congettura di Goldbach, che cioè ogni numero pari è la somma di due numeri primi. Quel progresso giunse per via indiretta, ma il suo punto di partenza fu l'ingenua fiducia di Ramanujan nell'esistenza di formule esatte per esprimere importanti sequenze numeriche come quella dei numeri primi. Nella stessa lettera in cui egli sosteneva di aver trovato una formula per i numeri primi, affermava di aver compreso come generare un'altra sequenza rimasta fino ad allora indomata: quella delle partizioni di un numero intero.

Quanti modi diversi ci sono di dividere cinque pietre in pile distinte? Il numero delle pile varia da un massimo di cinque pile composte da una sola pietra a una sola pila composta da cinque pietre, con un certo numero di possibilità intermedie:



I sette modi possibili di ripartire cinque pietre.

Tali possibilità distinte sono chiamate le *partizioni* del numero 5. Come mostra l'illustrazione, esistono sette possibili partizioni di 5.

Ed ecco qual è il numero di partizioni per i numeri interi che vanno da 1 a 15:

Numero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Partizioni	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Questa è una delle sequenze numeriche che abbiamo incontrato nel capitolo 2. Sono numeri che spuntano nel mondo fisico quasi con la stessa frequenza dei numeri di Fibonacci. Per esempio, dedurre la densità dei livelli energetici in certi sistemi quantistici semplici si riduce a comprendere il modo in cui cresce il numero delle partizioni.

La distribuzione di questi numeri non appare casuale quanto quella dei numeri primi, ma la generazione di Hardy aveva quasi rinunciato a trovare una formula esatta che producesse la loro sequenza. I matematici pensavano che, al massimo, vi potesse essere una formula in grado di produrre una stima che non si discostasse molto dall'effettivo numero di partizioni di *N*, in modo del tutto simile a quello in cui la formula di Gauss per i numeri primi forniva una buona approssimazione del numero di numeri primi non maggiori di *N*. Ma a Ramanujan non era mai stato insegnato a temere quel genere di sequenze. Era deciso a trovare una formula che gli dicesse che esistevano esattamente cinque modi di dividere quattro pietre in pile di-

stinte, o che ce n'erano 3.972.999.029.388 di dividere 200 pietre in pile distinte.

Laddove aveva fallito con i numeri primi, Ramanujan ottenne un successo spettacolare con le partizioni. Fu la combinazione della capacità di Hardy di venire a capo di dimostrazioni complesse e della cieca fiducia di Ramanujan nell'esistenza di una formula esatta a condurli alla scoperta. Littlewood non capì mai «perché Ramanujan era così sicuro che ne esistesse una». E quando si osserva la formula – in cui compaiono la radice quadrata di 2, π, differenziali, funzioni trigonometriche, numeri immaginari – non si può fare a meno di domandarsi come sia stata concepita:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{1 \le k \le N} \sqrt{k} \left(\sum_{h \bmod k} \omega_{h,k}\, e^{-2\pi i \frac{hn}{k}} \right) \frac{d}{dn} \left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - 1}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} \right) + O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)$$

In seguito Littlewood osservò: «Dobbiamo il teorema a una collaborazione eccezionalmente felice fra due uomini dotati di talenti assai dissimili, alla quale ciascuno diede il contributo migliore, più caratteristico e fortunato che possedeva».

Nella vicenda del calcolo delle partizioni c'è un dettaglio curioso. La complicata formula di Hardy e Ramanujan non fornisce il numero esatto di partizioni; produce invece una risposta che è corretta se la si approssima al numero intero più vicino. Così, per esempio, quando nella formula si inserisce il numero 200, si ottiene un valore non intero approssi-

mato a 3.972.999.029.388. Perciò, benché la formula permetta di ottenere la risposta cercata, il fatto che non colga l'essenza dei numeri di partizioni di N oggetti lascia insoddisfatti. (In seguito sarebbe stata scoperta una variante della formula che dà la risposta rigorosamente esatta.)

Anche se Ramanujan non riuscì a portare a buon fine lo stesso stratagemma nel caso dei numeri primi, il lavoro che compì insieme a Hardy sulla funzione di partizione ebbe un impatto importante sulla congettura di Goldbach, uno dei grandi problemi irrisolti della teoria dei numeri primi. La maggior parte dei matematici aveva rinunciato persino a tentare di risolvere questo problema. Né era mai stata proposta una sola idea da cui partire per provare a fare qualche progresso concreto nella risoluzione. Soltanto qualche anno prima, Landau aveva dichiarato che il problema era semplicemente inattaccabile.

Il lavoro compiuto da Hardy e Ramanujan sulla funzione di partizione inaugurò una tecnica che oggi è chiamata metodo del cerchio di Hardy e Littlewood. Il riferimento al cerchio nel nome del metodo trae origine dai piccoli diagrammi che accompagnavano i calcoli di Hardy e Ramanujan e che rappresentavano cerchi nella mappa dei numeri immaginari attorno ai quali i due matematici cercavano di eseguire delle integrazioni. Il motivo per il quale al metodo viene associato il nome di Littlewood e non quello di Ramanujan è l'uso che Littlewood e Hardy ne fecero per dare il primo contributo sostanziale a una dimostrazione della congettura di Goldbach. Pur non essendo in grado di provare che ogni

numero pari poteva essere espresso come somma di due numeri primi, nel 1923 Hardy e Littlewood riuscirono a dimostrare una cosa che per i matematici era quasi altrettanto importante, ovvero che tutti i numeri dispari maggiori di un certo numero fissato (un numero enorme) potevano essere scritti come somma di tre numeri primi. Ma c'era una condizione che erano obbligati a porre perché la loro dimostrazione risultasse valida: che l'ipotesi di Riemann fosse vera. Questo era dunque ancora un altro risultato subordinato al fatto che l'ipotesi di Riemann diventasse prima o poi il teorema di Riemann.

Ramanujan aveva contribuito a sviluppare quella tecnica, ma malauguratamente non visse abbastanza per essere testimone del ruolo inaspettato che essa ebbe per la matematica. Nel 1917 Ramanujan era sempre più depresso. La Gran Bretagna era stretta nella morsa degli orrori della Prima guerra mondiale. Il Trinity College aveva appena respinto la nomina a *fellow* di Ramanujan. La *fellowship* di Russell era stata da poco revocata a causa dei suoi sentimenti antibellici e il college non era disposto a tollerare le posizioni pacifiste di Ramanujan. Benché alla fine avesse imparato a comprimere i piedi dentro scarpe occidentali e a sfoggiare il tocco e la toga, il suo cuore rimaneva nell'India meridionale.

Cambridge stava diventando una prigione. Ramanujan era abituato alla libertà che offriva la vita in India, dove il clima caldo permetteva alle persone di passare molto tempo all'aria aperta. A Cambridge doveva rifugiarsi dentro le spesse mura del college per proteggersi dal vento gelido e sferzante

che proveniva dal Mare del Nord. Le divisioni sociali lo portavano ad avere pochi contatti, al di là delle interazioni formali della vita accademica. Stava anche cominciando a scoprire che l'insistenza di Hardy sul rigore della matematica impediva alla propria mente di vagare libera per il paesaggio matematico.

Al declino del suo stato psicologico si accompagnava un deperimento fisico. Il Trinity College non comprendeva le rigide regole alimentari che la religione gli imponeva. In India era abituato a ricevere il cibo direttamente nelle mani della moglie mentre lui riempiva i suoi quaderni. Anche se le cucine del college gli offrivano lo stesso servizio riservato ai *fellows* come Hardy e Littlewood, per Ramanujan il cibo servito alla Tavola alta era assolutamente indigesto. Non ce la faceva proprio a sopravvivere senza nessuno accanto e si sentiva terribilmente solo, avendo lasciato sua moglie e la sua famiglia in India. La malnutrizione produsse una sospetta tubercolosi, che lo costrinse a una serie di ricoveri in diverse case di cura.

Ramanujan cercò di tirare avanti concentrandosi sulla matematica, ma senza molto successo. I suoi sogni erano pieni di immagini matematiche deliranti. Credeva che i suoi dolori addominali fossero causati dalla punta senza fine che si elevava sopra il paesaggio di Riemann dove la funzione zeta andava all'infinito. Era forse una terribile punizione per aver infranto la legge braminica che gli vietava di attraversare i mari? Aveva frainteso il messaggio di Namagiri? Da quando era arrivato a Cambridge sua moglie non gli aveva più scritto. La pressione da sopportare divenne troppo forte.

Dopo un parziale ristabilimento, ancora depresso, Ramanujan tentò il suicidio gettandosi davanti a un convoglio della metropolitana londinese. Non ci riuscì grazie all'intervento di un guardiano che riuscì a far fermare il treno a pochi metri dal corpo prostrato di Ramanujan. Nel 1917 il tentato suicidio era un reato penale, ma grazie all'intervento di Hardy le accuse contro Ramanujan furono lasciate cadere, a patto che egli si ricoverasse in un sanatorio di Matlock, nel Derbyshire, dove sarebbe dovuto rimanere sotto controllo medico per dodici mesi.

Ora Ramanujan si trovava bloccato lontano da tutto, senza neanche lo stimolo dei suoi incontri quotidiani con Hardy. «Sono qui da un mese» scrisse a Hardy «e non mi è stato permesso di accendere il riscaldamento un solo giorno. Mi hanno promesso il riscaldamento nei giorni in cui faccio del lavoro matematico serio. Quel giorno non è ancora arrivato, e io sono lasciato in questa stanza esposta e terribilmente fredda.»

Alla fine Hardy riuscì a far trasferire Ramanujan in una casa di cura di Putney, un quartiere di Londra. Benché egli confessasse che Ramanujan era stato l'unico vero amore della sua vita, la loro relazione rimaneva pressoché priva di sentimento, se si esclude l'eccitazione di fare matematica insieme. Nel corso di una visita a Ramanujan che giaceva malato, non riuscendo a trovare parole di conforto, Hardy gli citò il numero del taxi con cui era arrivato, 1.729, come esempio di un numero del tutto privo di attrattive. Anche nel suo capezzale, Ramanujan era irrefrenabile: «No, Hardy! No,

Hardy! È un numero molto interessante. È il più piccolo numero esprimibile in due modi diversi come somma di due cubi». Aveva ragione: $1.729 = 1^3 + 12^3 = 10^3 + 9^3$.

Le sorti di Ramanujan si risollevarono un po' con la nomina a membro della Royal Society, l'istituzione scientifica più prestigiosa della Gran Bretagna, e alla fine anche con l'elezione a *fellow* del Trinity College. L'influenza che Hardy esercitò su queste nomine era l'unico modo in cui egli sapeva esprime l'amore di cui parlava. Ma Ramanujan non riacquistò mai la salute. Quando la Prima guerra mondiale finì, Hardy suggerì che forse avrebbe dovuto tornare India per trascorrervi un periodo di convalescenza. Il 26 aprile 1920 Ramanujan morì a Madras, all'età di trentatré anni, ucciso da una malattia che oggi si ritiene fosse amebiasi, un'infezione dell'intestino crasso che probabilmente aveva contratto prima di partire per l'Inghilterra.

Anche se alla fine Ramanujan non riuscì ad aver ragione dei numeri primi, la sua prima lettera a Hardy ha avuto un effetto duraturo sulla teoria che li riguarda. I matematici si sono convinti che la risposta a questo enigma irrisolto potrà comparire in qualsiasi momento e da qualsiasi fonte. Una nuova intuizione potrebbe proiettare un nome in precedenza sconosciuto dalle ombre di un'esistenza oscura alle luci della ribalta. Come il caso di Ramanujan ha mostrato, talvolta la conoscenza e le aspettative possono frenare i progressi. Gli accademici cresciuti nelle sedi tradizionali della cultura non sono necessariamente nella posizione migliore per uscire dagli schemi. C'è sempre la possibilità che un'altra bu-

sta voluminosa finisca sulla scrivania di qualche matematico, annunciando l'arrivo di un genio sconosciuto pronto a realizzare il sogno di Ramanujan di decifrare l'enigma dei numeri primi.

Le idee che Ramanujan lasciò dietro di sé erano destinate ad alimentare il lavoro di intere generazioni di matematici, e continuano a farlo. Di fatto, si potrebbe affermare che solamente negli ultimi decenni si è cominciato ad apprezzare appieno il reale valore delle idee di Ramanujan. Persino quando Hardy morì, la vera portata delle formule di Ramanujan non era ancora evidente. Lo stesso Hardy fu molto critico riguardo a una delle congetture di Ramanujan. «Sembra che ci siamo lasciati trascinare in una delle zone di ristagno della matematica» osservò parlandone in un suo scritto. Ma a distanza di anni possiamo dare un giudizio ben diverso sull'importanza della congettura tau di Ramanujan, come divenne nota, considerato il fatto che nel 1978 la sua soluzione valse a Pierre Deligne il conferimento di una medaglia Fields. Bruce Berndt, uno dei grandi estimatori di Ramanujan, lo ha paragonato a Bach, che dopo la morte cadde nel dimenticatoio per molti anni.

Berndt ha dedicato buona parte della propria vita ad analizzare i quaderni non pubblicati di Ramanujan. È il continuatore di una tradizione di matematici che sono rimasti stregati dalla massa di formule e di equazioni generate da Ramanujan. Esplorando quei quaderni, Berndt ha scoperto una curiosa tabella che riporta nei dettagli il numero dei numeri primi per N minore di 100.000.000. I valori sono cor-

retti o molto vicini a esserlo, e sono più precisi di quelli prodotti dalla formula che Ramanujan inviò a Hardy con la sua prima lettera. Ma non c'è traccia di come siano stati dedotti.

Forse Ramanujan aveva accesso a una formula segreta per calcolare la distribuzione dei numeri primi, una formula che era accurata quanto quella relativa alla funzione di partizione? È possibile che nei quaderni di Ramanujan, si celino ancora degli indizi che attendono di essere scoperti? Nel 1976 la comunità matematica fu attraversata da un brivido di eccitazione alla notizia del ritrovamento di un quaderno di Ramanujan che si riteneva perduto e che risultò pieno di matematica inedita. Questa scoperta è destinata inevitabilmente ad alimentare ipotesi sulla possibilità che nascosti negli archivi del Trinity College o in qualche scatolone a Madras ci siano altri tesori che non sono ancora stati portati alla luce e che spiegherebbero la capacità di Ramanujan di contare i numeri primi con tanta precisione.

La morte di Ramanujan fu un grande shock per Hardy, che soltanto due mesi prima aveva ricevuto dall'amico una lettera «piuttosto allegra e piena di matematica». La perdita di un così meraviglioso compagno di viaggio nelle sue escursioni attraverso il territorio matematico lo devastò. «Per me la sua originalità è stata fonte costante di ispirazione fin da quando lo conobbi, e la sua morte è uno dei peggiori colpi che abbia mai ricevuto.»

Invecchiando, anche Hardy cadde vittima della depressione. Aveva sempre pensato a se stesso come a una persona giovane. Adesso la vista della sua faccia segnata dalla vec-

chiaia lo ripugnava, tanto che prese l'abitudine di chiedere con insistenza che si girassero tutti gli specchi quando entrava in una stanza. Odiava gli effetti dell'età sulla sua capacità di fare matematica. La sua *Apologia di un matematico* è la memorabile descrizione di un matematico alla fine della sua carriera. Per fare matematica, un matematico «non deve essere troppo vecchio. La matematica è un esercizio creativo e non contemplativo, e nessuno ne può trarre gran consolazione quando ha perduto il potere o il desiderio di creare; e questo, a un matematico, è facile che accada molto presto».

Come Ramanujan prima di lui, anche Hardy avrebbe tentato di togliersi la vita, ingerendo pillole invece che saltando davanti a un treno. Ma vomitò le pillole e rimase cieco da un occhio. C.P. Snow ricorda una sua visita a Hardy dopo quel tentativo di suicidio. «Si sbeffeggiava da sé. Aveva combinato un gran pasticcio. C'era mai stato qualcuno che avesse combinato un pasticcio più grande?» La sola consolazione di Hardy, come scrisse nell'*Apologia*, era Ramanujan. «Ancor oggi, nei momenti di depressione, quando sono costretto ad ascoltare della gente pedante e presuntuosa, mi dico: "Beh, io ho fatto una cosa che voi non sareste mai stati capaci di fare: ho collaborato con Littlewood e Ramanujan quasi su un piano di parità".»

7

Esodo matematico: da Gottinga a Princeton

Dato che le scienze matematiche sono così vaste e varie, è necessario circoscriverne la pratica e l'insegnamento, poiché ogni attività umana è legata a luoghi e persone.

David Hilbert, parlando a un ricevimento organizzato per celebrare l'arrivo di Landau a Gottinga come professore nel 1913.

Il padre di Landau, Leopold, scoprì che nella stessa via di Berlino in cui abitava viveva un giovane portento della matematica. Incuriosito, lo invitò a casa per un tè. Benché fosse molto timido, Carl Ludwig Siegel accettò di andare a incontrare il padre del grande matematico di Gottinga. Nella sua biblioteca, il vecchio Landau prese i due volumi del libro sui numeri primi scritto da suo figlio e li diede a Siegel. Per il momento erano probabilmente troppo difficili per Siegel, spiegò, ma forse in seguito sarebbe stato in grado di leggerli. Siegel doveva far tesoro del libro di Edmund Landau, che avrebbe avuto effetti duraturi sul suo sviluppo matematico.

L'ingresso di Siegel nella maggiore età coincise con lo scoppio della Prima guerra mondiale. L'idea di prestare servizio nell'esercito riempiva di paura quel ragazzo giovane e riservato. Egli cominciò a sviluppare un'avversione profonda per tutto ciò che aveva a che fare con le forze armate. Nonostante l'interesse che aveva mostrato il padre di Landau per i suoi progressi matematici, da principio Siegel aveva scelto di studiare astronomia, ritenendola una disciplina che non avrebbe mai potuto avere alcuna rilevanza per la guerra. Ma i corsi di astronomia cominciavano tardi e così, per riempire il tempo, Siegel si mise a frequentare alcune lezioni di matematica. Non ci volle molto prima che se ne lasciasse avvincere completamente. Esplorare l'universo dei numeri divenne la sua passione. Presto acquisì una preparazione sufficiente a capire il contenuto dei volumi sui numeri primi che il padre di Landau gli aveva dato.

Nel 1917 la guerra invase inesorabilmente la vita di Siegel, e quando egli si rifiutò di prestare il servizio militare fu richiuso per punizione in un manicomio. Fu il padre di Landau a intervenire perché venisse rilasciato. «Se non fosse stato per Landau sarei morto» riconobbe in seguito Siegel. Nel 1919, quando ancora stava riprendendosi da quel calvario, il giovane Siegel raggiunse Edmund Landau, il suo eroe matematico, a Gottinga, dove sarebbe sbocciato il suo talento matematico.

Siegel scoprì anche che avrebbe dovuto imparare a sopportare il carattere esasperante di Landau. In un'occasione, quando era già un matematico laureato, Siegel andò a far vi-

sita a Landau a Berlino. A cena il professore passò tutto il tempo a spiegare con grande meticolosità una dimostrazione estremamente dettagliata e tecnica, ostinandosi a fornire ogni minimo particolare. Siegel lo ascoltò paziente, ma quando Landau terminò era così tardi che non c'erano più autobus che lo riportassero a casa. Siegel fu costretto a percorrere l'intero tragitto a piedi. Durante la lunga camminata, ripensò alla dimostrazione di Landau, che riguardava i punti a livello del mare in un paesaggio simile a quello costruito da Riemann. Prima di giungere a casa aveva escogitato un'ingegnosa dimostrazione alternativa a quella che gli aveva fatto perdere l'autobus. Il giorno seguente, in un momento di sfrontatezza, Siegel inviò a Landau una cartolina con i ringraziamenti per la cena e i dettagli succinti della sua dimostrazione alternativa. La cartolina era sufficiente a farceli stare tutti.

Quando Siegel giunse a Gottinga, mentre la Germania era oppressa dai costi delle riparazioni di guerra, fu costretto ad alloggiare presso uno dei professori del dipartimento. Un altro professore gli comprò una bicicletta con cui potesse pedalare per le stradine medievali della città. All'inizio Siegel era piuttosto intimidito dai tanti nomi famosi che davano lustro al dipartimento di matematica dell'università cittadina, soprattutto dal grande Hilbert. Perciò lavorava in silenzio e in solitudine, determinato a compiere la scoperta fondamentale che avrebbe impressionato i famosi matematici che incrociava nei corridoi del dipartimento. Assisteva alle lezioni di Hilbert, assorbendo le idee di quell'uomo formi-

dabile. Sapeva che rispondere a uno solo dei ventitré problemi di Hilbert sarebbe stato il suo passaporto per il successo.

Da principio, di fronte a giganti del calibro di Hilbert era assolutamente troppo timido per esprimere le proprie idee. Alla fine riuscì a trovare il coraggio necessario quando alcuni dei membri anziani della facoltà lo invitarono a unirsi a loro per una nuotata nel fiume Leine. In costume da bagno Hilbert aveva un aspetto molto meno intimidatorio, e Siegel si sentì abbastanza audace da farlo partecipe di ciò che pensava dell'ipotesi di Riemann. La reazione di Hilbert fu entusiastica e il suo sostegno assicurò al timido collega un incarico all'università di Francoforte nel 1922.

Nel corso della sua vita Siegel contribuì con successo alla soluzione di parecchi dei problemi di Hilbert, ma fu il suo contributo importante e non convenzionale all'ipotesi di Riemann a imprimere saldamente il suo nome sulla mappa matematica.

Ripensare Riemann

Quando decise di dedicarsi alla soluzione dell'ottavo problema di Hilbert, Siegel stava cominciando a rendersi conto che alcuni matematici erano sempre più disillusi riguardo al contributo dato da Riemann alla materia. Il mentore di Siegel, Landau, era forse la voce più apertamente critica su ciò che Riemann era effettivamente riuscito a realizzare nel saggio di dieci pagine pubblicato nel 1859. Pur riconoscendo che era

un «saggio estremamente brillante e utile», Landau proseguiva mitigando le sue lodi: «La formula di Riemann non è affatto la cosa più importante nella teoria dei numeri. Riemann ha soltanto creato gli strumenti che, una volta perfezionati, hanno permesso in seguito di dimostrare molte altre cose».

Nel frattempo, a Cambridge, Hardy e Littlewood stavano assumendo un atteggiamento altrettanto sprezzante. Verso la fine degli anni Venti, l'incapacità di risolvere l'ipotesi di Riemann cominciava a diventare frustrante per Hardy. Anche Littlewood prese a domandarsi se il fatto che non si riuscisse a dimostrarla non significasse che in realtà l'ipotesi era sbagliata:

> Penso che sia falsa. Non ci sono indizi di alcun tipo che la sostengano. E non bisognerebbe credere a cose per le quali non esistono indizi. Devo anche annotare una mia sensazione personale: non esiste una sola *ragione* concepibile per ritenere che debba essere vera [...] D'altra parte, la vita sarebbe più confortevole se esistessero delle ragioni fondate per ritenere che l'ipotesi è falsa.

In effetti Riemann era stato alquanto evasivo quando si era trattato di fornire le prove del fatto che gli zeri cadevano dove prediceva la sua ipotesi. Nel suo saggio di dieci pagine non c'è il calcolo di uno solo di quei punti a livello del mare. Secondo Hardy, l'intuizione di Riemann sugli zeri presenti nel suo paesaggio non era altro che una speculazione di carattere euristico.

Il fatto che nel saggio Riemann desse l'impressione di non aver calcolato la posizione di quegli zeri contribuì ad affibbiargli l'immagine del matematico raziocinante, un uomo di idee che non era interessato a sporcarsi le mani facendo calcoli. Dopo tutto, era questo lo spirito della rivoluzione che Riemann aveva avviato. In modo simile, Hilbert aveva dedicato la propria vita a promuovere questo nuovo approccio alla matematica. Come scrisse in uno dei suoi saggi scientifici, «ho tentato di evitare l'enorme apparato di calcoli di Kummer [Ernst Kummer, il successore di Dirichlet a Berlino], così che anche in questo caso dovrebbe essere soddisfatto il principio di Riemann secondo cui le dimostrazioni devono essere stimolate dal solo pensiero e non dai calcoli». Felix Klein, collega di Hilbert a Gottinga, amava dire che Riemann operava principalmente per mezzo di «grandi idee generali» e che «spesso si affidava al proprio intuito».

Hardy, tuttavia, non si accontentava di affidarsi all'intuito. Lui e Littlewood riuscirono a elaborare un metodo per calcolare con precisione le posizioni di alcuni dei primi zeri. Se l'ipotesi di Riemann fosse stata falsa, allora, armati della loro formula, avrebbero avuto una possibilità molto piccola di individuare uno zero che non cadeva sulla retta critica di Riemann. Il metodo che elaborarono sfruttava la simmetria che Riemann aveva scoperto nel suo paesaggio fra la terra a est e quella a ovest della linea magica passante per $\frac{1}{2}$. Usarono il loro metodo in combinazione con un efficiente procedimento concepito da Eulero per fornire valori approssimati di somme infinite. Alla fine degli anni Venti i due matemati-

ci di Cambridge erano riusciti a localizzare 138 zeri. Come Riemann aveva previsto, cadevano tutti sulla retta passante per $\frac{1}{2}$. Era chiaro, tuttavia, che la formula di Hardy e Littlewood stava esaurendo le sue potenzialità. Individuare la posizione esatta di un qualsiasi zero a nord dei primi 138 attraverso i calcoli stava diventando una strada impraticabile.

Sembrava proprio che non fosse possibile spingere quei calcoli molto più in là. Grazie a un'analisi teorica, Hardy aveva dimostrato che un numero infinito di zeri doveva cadere sulla retta. Adesso c'era la sensazione sempre più netta che per poter vedere uno qualsiasi degli zeri che fossero eventualmente caduti fuori della retta, sarebbe stato necessario spingersi molto a nord nel paesaggio di Riemann. Come Littlewood aveva spiegato, i numeri primi, più di ogni altra creatura dello zoo matematico, amavano nascondere i loro veri colori nelle aree più remote dell'universo dei numeri. Perciò i matematici cominciarono ad abbandonare l'idea di individuare in modo esplicito la posizione degli zeri e presero a concentrarsi su altre caratteristiche più teoriche del paesaggio che avrebbero potuto rivelare i misteri del ragionamento di Riemann.

Tutto questo cambiò a causa di una scoperta assolutamente inaspettata. Mentre a Francoforte si sforzava di mettere ordine nelle proprie idee sull'ipotesi di Riemann, Siegel ricevette una lettera dallo storico della matematica Erich Bessel-Hagen, che stava passando in rassegna gli appunti inediti di Riemann. Elise, la moglie di Riemann, aveva recuperato alcune di quelle carte dalle mani della zelante gover-

nante responsabile di averne ridotto in cenere una buona parte. Dopodiché Elise aveva affidato i rimanenti appunti scientifici a Richard Dedekind, coetaneo di suo marito. Ma pochi anni più tardi cominciò a pentirsi di aver ceduto documenti che avrebbero potuto contenere dettagli personali e chiese a Dedekind di restituirglieli. Anche nel caso in cui uno dei manoscritti di suo marito fosse stato quasi completamente occupato da appunti matematici, se solo conteneva la minima traccia di una lista della spesa o il nome di un amico di famiglia, Elise pretendeva la restituzione delle pagine incriminate.

Alla fine Dedekind aveva depositato i restanti appunti scientifici nella biblioteca di Gottinga. Ora Bessel-Hagen stava tentando di dare un senso alla massa di carte conservate negli archivi, ma con scarso successo. Come accade quasi sempre con gli appunti dei matematici, le note di Riemann erano un guazzabuglio caotico di idee e formule monche. Bessel-Hagen si domandava se per caso Siegel non sarebbe riuscito a combinare qualcosa di meglio nella decifrazione di quei geroglifici.

Siegel scrisse al bibliotecario di Gottinga per chiedergli il permesso di consultare il *Nachlass* di Riemann, ovvero i suoi scritti postumi, come sono chiamati oggi. Il bibliotecario dispose che i documenti fossero spediti alla biblioteca di Francoforte dove Siegel avrebbe potuto consultarli. Siegel aspettava con ansia di dedicarsi a quel compito: sarebbe stata una gradita distrazione dalla frustrazione dovuta ai mancati progressi che stava facendo nella sua ricerca. I documenti arriva-

rono puntualmente, ed egli si precipitò in biblioteca insieme a un collega che era in visita all'università di Francoforte. Mentre lo apriva, dal pacco fuoriuscì una gran massa di fogli zeppi di complicati calcoli numerici. Quelle pagine avrebbero smentito una volta per tutte l'immagine che di Riemann era stata data per settant'anni, ovvero quella di un matematico di intuito e concetti incapace di produrre prove solide a sostegno delle proprie idee. Indicando quella massa di calcoli, Siegel esclamò con ironia: «Eccoli qui i grandi concetti generali di Riemann!».

Molti matematici di secondo piano avevano rovistato già fra quelle pagine in cerca di un indizio della dimostrazione dell'ipotesi di Riemann, ma nessuno era riuscito a dare un senso alla massa di equazioni spezzettate. La cosa più sconcertante era l'enorme quantità di calcoli aritmetici che Riemann sembrava aver fatto nel tempo libero. Che cos'erano tutti quei calcoli? Ci voleva un matematico della statura di Siegel per capire ciò che Riemann aveva fatto.

Fissando quelle pagine, Siegel cominciò a comprendere che Riemann aveva tenuto fede al dettato del suo maestro. Come Gauss aveva sempre sottolineato, un architetto rimuove le impalcature una volta che ha completato l'edificio. I fragili fogli che adesso Siegel teneva fra le sue mani erano colmi di calcoli fino ai margini. Riemann aveva vissuto i suoi ultimi anni in povertà, dato che aveva dovuto mantenere le sorelle, e poteva permettersi solo carta di bassa qualità, da cui spremeva fino all'ultima porzione di spazio disponibile. Il pensatore di Hilbert si rivelava essere un maestro dei cal-

coli, ed era proprio su quei calcoli che aveva costruito la sua visione concettuale del mondo, individuando schemi nelle prove che andava raccogliendo. Alcuni dei calcoli di Riemann, come quello della radice quadrata di 2 fino alla trentottesima cifra, non erano innovativi, ma altri intrigavano Siegel, che non si era mai imbattuto in qualcosa di simile. Mentre rovistava fra le pagine, quel guazzabuglio caotico di calcoli sparsi cominciò a rivelare un senso. Siegel capì che Riemann stava calcolando gli zeri del paesaggio zeta.

Siegel scoprì che Riemann aveva usato una formula straordinaria, che gli permetteva di calcolare le altitudini nel paesaggio zeta con estrema precisione. La prima parte della formula si basava su un trucco poi riscoperto da Hardy e Littlewood. Riemann li aveva preceduti di una sessantina d'anni. La seconda parte della formula era completamente inedita: Riemann aveva scoperto un modo per calcolare la rimanente somma infinita che era di gran lunga più ingegnoso di quello ancora utilizzato ai tempi di Siegel. Al contrario del metodo di Eulero che era stato applicato per individuare i primi 138 zeri (cioè i primi 138 punti a livello del mare nel paesaggio zeta), la formula ideata da Riemann non perdeva efficacia quando egli si spingeva a calcolare la posizione di punti situati molto più a nord.

Sessantacinque anni dopo la morte di Riemann, l'augusto matematico manteneva ancora un amplissimo margine di vantaggio nella competizione. Hardy e Landau si erano sbagliati a ritenere che il saggio di Riemann fosse solo una straordinaria raccolta di intuizioni euristiche. Al contrario,

si basava su solidi calcoli e idee teoriche che Riemann aveva deciso di non rivelare al mondo. Pochi anni dopo la sua scoperta da parte di Siegel, la formula segreta di Riemann sarebbe stata utilizzata a Cambridge da alcuni studenti di Hardy per confermare che i primi 1.041 zeri cadevano sulla retta di Riemann. La formula, tuttavia, avrebbe manifestato tutto il suo vero valore soltanto con l'avvento dell'era dell'informatica.

È piuttosto strano che ci sia voluto così tanto tempo perché i matematici capissero che gli appunti di Riemann potessero contenere simili gemme. Nel suo saggio di dieci pagine, e in alcune lettere che scrisse ad altri matematici in quel periodo, ci sono senza dubbio gli indizi del fatto che Riemann aveva messo le mani su qualcosa d'importante. In effetti, nel saggio egli cita una nuova formula, ma prosegue affermando di non averla «semplificata a sufficienza per annunciarla». I matematici di Gottinga studiavano da settant'anni quel documento pubblicato, ignari del fatto che la formula magica per localizzare gli zeri si trovava a pochi isolati di distanza. Klein, Hilbert e Landau non ci avevano pensato due volte a emettere la loro sentenza su Riemann, benché nessuno di loro avesse nemmeno dato un'occhiata al suo inedito *Nachlass*.

In tutta onestà, è sufficiente un'occhiata agli appunti disordinati di Riemann per rendersi conto della portata del compito. Come scrisse Siegel, «nessuna parte degli scritti di Riemann relativi alla funzione zeta è pronta per essere pubblicata; talvolta capita di trovare formule sconnesse sulla

stessa pagina; di frequente le equazioni sono state scritte solo per metà». Era come compulsare la prima stesura di una sinfonia incompiuta. La composizione finale deve molto al virtuosismo matematico con cui Siegel estrasse la formula dal caos degli appunti di Riemann. Il nome con cui è conosciuta oggi – formula di Riemann-Siegel – è pienamente giustificato.

Grazie alla perseveranza di Siegel, era stato rivelato un aspetto inedito della personalità di Riemann. Certamente Riemann aveva difeso a spada tratta l'importanza del pensiero astratto e dei concetti generali. Ma egli sapeva bene che era altrettanto importante non trascurare il calcolo e la sperimentazione numerica. Non aveva dimenticato la tradizione settecentesca da cui era emersa la sua matematica.

Il *Nachlass* conservato nella biblioteca di Gottinga rappresentava solo una parte di ciò che era stato recuperato dalle mani della governante di Riemann. Il 1° maggio 1875 Elise Riemann scrisse a Dedekind per richiedergli una parte del materiale privato che desiderava tornasse in possesso della famiglia. Fra questo materiale c'era «un libricino nero che contiene annotazioni del soggiorno di Riemann a Parigi nella primavera del 1860». Appena pochi mesi prima di quel viaggio, Riemann aveva pubblicato il suo fondamentale saggio di dieci pagine sui numeri primi, affrettandosi per riuscire a mandarlo in stampa in coincidenza con la sua nomina all'Accademia di Berlino. A Parigi, dopo l'attività frenetica della pubblicazione, ebbe il tempo di aggiungere dettagli alle proprie idee. Il clima era orribile a Parigi; pioggia e grandine

impedirono a Riemann di visitare la città. Perciò se ne rimase tranquillo nella sua stanza, a mettere i propri pensieri sulla carta. Non è irragionevole ipotizzare che, insieme con le sue impressioni personali di Parigi, in quel «libricino nero» Riemann avesse registrato i propri ragionamenti sui punti a livello del mare nel paesaggio zeta. Il libro non è mai stato recuperato, anche se ci sono alcuni indizi su quale sia stato il suo destino.

Il 22 luglio del 1892, il genero di Riemann scrisse a Heinrich Weber: «All'inizio mamma non poteva accettare che le carte di Riemann non rimanessero più in mani private; per lei sono qualcosa di sacro e non le piace l'idea che siano accessibili a qualsiasi studente, che in tal caso sarebbe anche in grado di leggere le note ai margini, alcune delle quali sono puramente personali». A differenza di quanto era accaduto con Fermat, il cui nipote era stato fin troppo ansioso di pubblicare le note a margine dello zio, la famiglia di Riemann era riluttante a rendere pubbliche delle note che Riemann non aveva mai inteso pubblicare. Sembra che in questa fase il libricino nero fosse ancora in possesso della famiglia.

Le ipotesi sull'ubicazione del quaderno abbondano. Alcuni indizi fanno ritenere che in seguito Bessel-Hagen abbia acquistato una parte del materiale inedito rimasto nelle mani della famiglia. Non è chiaro se egli comprò quel materiale a un'asta o se se lo procurò tramite un contatto personale. Una parte delle carte finì negli archivi dell'università di Berlino, ma a quanto pare Bessel-Hagen decise di tenersi il resto per sé. Morì di stenti nell'inverno del 1946, nel caos che se-

guì la conclusione della Seconda guerra mondiale. I suoi effetti personali non sono mai stati trovati.

Secondo un'altra storia, il libricino nero finì nella mani di Landau. Si dice che, in vista delle incertezze degli anni fra le due guerre, egli lo affidò a un genero, il matematico I.J. Schoenberg, che nel 1930 fuggì in America. Ma anche questa pista si perde nel nulla. Dato che oggi c'è in palio un milione di dollari, la ricerca del libricino nero di Riemann si è trasformata in una caccia al tesoro.

Senza gli appunti di Riemann e la determinazione di Siegel, quanto ci sarebbe voluto per portare alla luce quella formula magica? È una formula così sofisticata che probabilmente non la conosceremmo nemmeno oggi. Di quali altre gemme siamo stati privati a causa della scomparsa di quel libricino nero? Riemann sosteneva di poter dimostrare che la maggior parte degli zeri cadevano sulla retta critica, eppure nessuno ancora ha trovato una dimostrazione di tale affermazione. Che cosa potrebbe essere rimasto sepolto negli archivi delle biblioteche tedesche? Forse il libricino nero è finito in America? Oppure sopravvisse al falò della governante solo per andar perso nei fuochi della Seconda guerra mondiale?

Nel 1933, in tutta la Germania i matematici trovavano sempre più difficile concentrarsi sullo studio della loro disciplina. La svastica sventolava sulla biblioteca di Gottinga. Della facoltà facevano parte molti matematici ebrei o di sinistra. Nelle manifestazioni di piazza di quel periodo si prendeva di mira specificamente il dipartimento di mate-

matica come «roccaforte marxista» e a metà degli anni Trenta gran parte dei membri della facoltà aveva perso il lavoro a causa della purga delle università voluta da Hitler. Molti cercarono rifugio all'estero. A Landau, nonostante fosse ebreo, fu permesso di restare perché era stato nominato professore prima dello scoppio della Prima guerra mondiale. La clausola di esclusione dei non ariani nella legge sull'impiego pubblico dell'aprile 1933 non si applicava ai professori con un lungo stato di servizio o a coloro che avevano combattuto in guerra.

Le cose peggiorarono. Nell'inverno del 1933 le lezioni di Landau erano picchettate dagli studenti nazisti, fra i quali c'era uno dei matematici più brillanti di quella generazione, Oswald Teichmüller. Un professore ebreo di Gottinga descrive Teichmüller come «un uomo molto giovane, scientificamente dotato, ma completamente disorientato e notoriamente folle». Un giorno, quando arrivò nell'aula ad anfiteatro dove avrebbe dovuto tenere lezione, Landau trovò il giovane fanatico nazista che gli bloccava il passo. Teichmüller disse a Landau che il suo modo giudeo di presentare il calcolo infinitesimale era completamente incompatibile col modo di pensare ariano. Landau non resse alla pressione, diede le dimissioni e si ritirò a Berlino. Il fatto che gli fosse negata la possibilità di insegnare lo ferì profondamente. Hardy lo invitò a tenere alcune lezioni a Cambridge. «Fu davvero commovente vedere la sua gioia nel trovarsi di nuovo davanti a una lavagna e la sua pena quando quell'opportunità giunse al termine» ricordò Hardy. Incapace di pren-

dere in considerazione l'idea di abbandonare la propria patria, Landau ritornò in Germania, dove morì nel 1938.

Quell'anno Siegel – che non aveva parenti ebrei – fu trasferito da Francoforte a Gottinga per cercare di risollevare la reputazione del dipartimento di matematica. Nel 1940 andò volontariamente in esilio in America per protestare contro gli orrori della guerra. Dopo le terribili esperienze che aveva vissuto da ragazzo durante la Prima guerra mondiale, aveva giurato che non sarebbe mai rimasto in Germania se il suo Paese fosse entrato di nuovo in guerra. Trascorse gli anni della guerra all'Institute for Advanced Study di Princeton. Dei matematici che avevano plasmato la grande reputazione di Gottinga, il solo Hilbert restò in Germania. Per lui la supremazia matematica di Gottinga era sempre stata un'ossessione. Ormai anziano, non riusciva a comprendere le ragioni della devastazione da cui ora si trovava circondato. Siegel tentò di spiegargli perché molti membri della facoltà se n'erano andati. «Aveva l'impressione, mi parve, che stessimo cercando di giocargli un brutto scherzo» ricordò in seguito Siegel.

Nello spazio di poche settimane Hitler aveva distrutto la grande tradizione di Gottinga che Gauss, Riemann, Dirichlet e Hilbert avevano creato. «Fu una delle peggiori tragedie subite dalla cultura umana dal tempo del Rinascimento» scrisse un commentatore. Gottinga (e, si potrebbe forse aggiungere, la stessa matematica tedesca) non si è mai ripresa completamente dalla decimazione che i nazisti perpetrarono negli anni Trenta del Novecento. Hilbert morì il giorno di san

Valentino del 1943, dopo una caduta nelle strade medievali di Gottinga. Per la cittadina, la morte di Hilbert segnò la fine del suo ruolo di mecca della matematica.

In tutta Europa la matematica era sprofondata nella crisi. Mentre le nazioni si preparavano per l'inevitabile scontro, giustificare la ricerca fine a se stessa di idee astratte diventava sempre più difficile. Ancora una volta, alla scienza europea fu assegnato il compito di fornire una supremazia militare alle nazioni. Molti matematici avrebbero seguito l'esempio di Siegel, emigrando in America. Per la maggior parte di loro, la prosperità e il sostegno che incontrarono sull'altra sponda dell'Atlantico risultò l'ambiente perfetto in cui riprendere la ricerca pura. Se l'America beneficiò di questa immigrazione accademica, l'Europa non ha più riconquistato il suo ruolo di potenza mondiale della matematica.

In effetti alcuni matematici fecero ritorno dall'esilio. Una volta finita la guerra, Siegel rientrò in Germania. Rifugiato a Princeton, era rimasto completamente all'oscuro degli sviluppi matematici in Europa e pensava che durante la sua assenza non fosse successo molto. Lo aspettava una sorpresa. Sebbene moltissimi matematici se ne fossero andati o avessero smesso di occuparsi della loro disciplina, risultò che una novità c'era. Siegel incontrò il suo amico Harald Bohr, il matematico danese che a Copenhagen aveva collaborato con Hardy nei tentativi di dimostrare l'ipotesi di Riemann. «Dunque, è successo qualcosa durante il mio esilio a Princeton?» chiese Siegel al suo vecchio collega. «Selberg!» fu la risposta di Bohr.

Selberg, lo scandinavo solitario

Nel 1940 Siegel era riuscito a raggiungere Princeton passando per la Norvegia. Era stato invitato a tenere una conferenza all'università di Oslo, e le autorità tedesche avevano dato il loro consenso alla visita, ignare del fatto che per Siegel quella conferenza era un pretesto. Lo scopo principale del viaggio era infatti quello di fuggire dall'Europa su una nave che sarebbe partita da Oslo diretta in America. Mentre la nave su cui si era imbarcato usciva dal porto, Siegel osservò una flotta di mercantili tedeschi che si preparavano ad attraccare. In seguito seppe che quelle navi erano le avanguardie delle forze d'invasione tedesche. Lui era fuggito, ma nel dipartimento di matematica dell'università di Oslo era rimasto un giovane matematico di nome Atle Selberg. Poco più che un ragazzo, Selberg stava nascondendo la testa nella sabbia matematica nel tentativo di ignorare i tumulti che lo circondavano.

Atle Selberg, professore all'Institute for Advanced Study di Princeton.

Anche prima che la guerra travolgesse la Norvegia, Selberg era felice di passare i suoi giorni di lavoro in volontaria clausura. Spesso un'esistenza isolata spinge il matematico a prendere una direzione completamente nuova. Selberg aveva già deciso di lavorare in un campo della matematica con cui nessun altro aveva una familiarità particolare nella regione scandinava. Il fatto di non ricevere alcun aiuto dai colleghi nei suoi sforzi non lo scoraggiò. Al contrario, sembrava trovar gioia nella solitudine. Mentre la guerra si avvicinava e la Norvegia restava sempre più isolata, con i giornali scientifici che non riuscivano a raggiungerla, Selberg trovò ispirazione in quel silenzio. «Era come essere in una sorta di prigione. Eri tagliato fuori. Sicuramente avevi l'opportunità di concentrarti sulle tue idee. Non eri distratto da ciò che facevano gli altri. In quel senso ritenevo che da molti punti di vista la situazione fosse decisamente buona per fare il mio lavoro.»

Quell'autosufficienza avrebbe caratterizzato tutta la vita matematica di Selberg. Era stata coltivata durante gli anni dell'adolescenza, quando Selberg sedeva indisturbato per ore nella biblioteca personale di suo padre, rovistando nei tanti libri di matematica che trovava sugli scaffali. Fu durante quelle lunghe ore che s'imbatté in un articolo su Ramanujan in una rivista della Società matematica norvegese. Selberg ricorda come quelle «strane e bellissime formule [...] fecero un'impressione molto profonda e duratura su di me». L'opera di Ramanujan divenne una delle principali fonti d'ispirazione per Selberg. «Era come una rivelazione, un mondo completamente nuovo per me, che esercitava un'attrazione

molto maggiore sull'immaginazione.» Suo padre gli regalò le *Collected Papers* di Ramanujan, che Selberg conserva ancora oggi. Formatosi da autodidatta grazie all'aiuto dell'ampia collezione di volumi di matematica di suo padre, quando nel 1935 si iscrisse all'università di Oslo Selberg produceva già lavori originali.

Lo affascinava in particolare la formula di Ramanujan per calcolare la sequenza del numero di partizioni, che il matematico indiano aveva scoperto insieme a Hardy. Benché la formula di Ramanujan fosse considerata un risultato meraviglioso, in essa c'era qualcosa di insoddisfacente. La formula forniva una risposta che non era un numero intero; il numero di partizioni era dato dal numero intero più prossimo al risultato generato dalla formula. Doveva per forza esistere una formula in grado di generare esattamente il numero di partizioni di N oggetti. Selberg fu felicissimo quando nell'autunno del 1937 riuscì a far meglio di Ramanujan, ideando una formula esatta. Poco dopo la scoperta, mentre stava leggendo una recensione di quello che era il suo primo articolo scientifico, l'occhio gli cadde sulla recensione vicina. Con suo grande disappunto scoprì di essere stato battuto sul filo di lana da Hans Rademacher, in un articolo pubblicato l'anno precedente. Rademacher era fuggito dalla natia Germania diretto in America nel 1934, dopo che i nazisti l'avevano costretto a lasciare un posto a Breslavia a causa delle sue simpatie pacifiste. «All'epoca fu un po' un colpo per me, poi ho fatto l'abitudine a questo genere di cose!» Il fatto che Selberg non avesse avuto notizia del contributo di Rademacher

illustra quanto la Norvegia fosse isolata in quegli anni dagli sviluppi matematici che avevano luogo altrove.

Selberg considerò sempre piuttosto sorprendente il fatto che Hardy e Ramanujan non avessero trovato la formula esatta. «Sono convinto che la responsabilità ricada su Hardy [...] Hardy non si fidava appieno della perspicacia e dell'intuito di Ramanujan [...] Penso che se Hardy avesse avuto una maggior fiducia in Ramanujan, allora avrebbero finito inevitabilmente per ricavare la serie di Rademacher. Ci sono pochi dubbi al riguardo.» Può darsi, ma il percorso che seguirono produsse il contributo dato da Hardy e Littlewood alla soluzione della congettura di Goldbach, cosa che in caso contrario probabilmente non si sarebbe verificata.

Selberg cominciò a leggere tutto quanto poteva dell'opera del trio di Cambridge: Ramanujan, Hardy e Littlewood. A interessarlo era soprattutto il loro lavoro sui numeri primi in relazione con la funzione zeta. In uno degli articoli di Hardy e Littlewood c'era un'affermazione che lo incuriosiva in modo particolare. I loro metodi attuali, avevano scritto, non sembravano offrire alcuna speranza di dimostrare che la maggioranza degli zeri, i punti a livello del mare nel paesaggio di Riemann, si trovassero sulla retta magica di Riemann. Hardy aveva compiuto il passo importantissimo di dimostrare che sulla retta cadeva quanto meno un numero infinito di zeri, ma non era riuscito a dimostrare che quel numero infinito ammontasse anche soltanto a una frazione del numero totale di zeri. A dispetto di alcuni progressi compiuti con Littlewood, il numero degli zeri di cui i due matematici

erano riusciti a dimostrare la presenza sulla retta era sommerso da quello degli zeri che non erano in grado di individuare. Hardy e Littlewood affermavano senza titubanze che sarebbe stato impossibile migliorare i loro risultati utilizzando i metodi che essi stessi avevano sviluppato.

Ma Selberg non era altrettanto pessimista. Egli pensava che fosse ancora possibile ricavare qualcosa dalle loro idee. «Stavo guardando quel passaggio nell'articolo originale di Hardy e Littlewood in cui alla fine spiegano perché il loro metodo non avrebbe potuto dare più di quanto loro erano riusciti a dimostrare. Lo lessi e ci ragionai sopra. E poi mi resi conto che quella era una totale assurdità.» L'intuizione di Selberg – la sensazione di poter andare oltre i risultati di Hardy e Littlewood – si rivelò giusta. Anche se non era ancora in grado di dimostrare che tutti gli zeri giacevano sulla retta, riuscì però a provare che la percentuale di zeri catturati grazie al suo metodo non si riduceva a zero quando egli si spingeva a calcolare la posizione dei punti collocati più a nord. Selberg non era molto sicuro di quale porzione di zeri fosse riuscito a individuare in questo modo, ma il suo fu il primo tentativo riuscito di aprire una breccia di una certa entità nel problema. Col senno di poi, sembra che Selberg riuscì a dimostrare che circa il cinque o il dieci per cento degli zeri cadevano sulla retta. Ciò significava che se si proseguiva a contare gli zeri verso nord, almeno questa frazione di zeri obbediva all'ipotesi di Riemann.

Pur non essendo una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann, tuttavia la breccia aperta da Selberg rappresentava un

importante passo avanti psicologico. Ma nessuno ne era a conoscenza. Lui stesso non era sicuro che qualcuno non l'avesse preceduto nella scoperta. La guerra finì, e nell'estate del 1946 Selberg fu invitato a parlare al Congresso scandinavo di matematica, a Copenhagen. Essendo già stato scottato dall'esperienza precedente con la formula esatta per il calcolo del numero di partizioni, decise che avrebbe fatto meglio a verificare se i suoi risultati sugli zeri della funzione di Riemann fossero roba vecchia oppure no. Ma l'università di Oslo non aveva ancora ricevuto le copie delle riviste di matematica che non erano arrivate durante la guerra. «Avevo sentito che alla biblioteca dell'Istituto di tecnologia di Trondheim avevano ricevuto le copie. Perciò andai fino a Trondheim espressamente per quello. Trascorsi circa una settimana nella biblioteca.»

Si stava preoccupando inutilmente. Scoprì di essere molto più avanti di chiunque altro nella comprensione degli zeri nel paesaggio zeta di Riemann. La conferenza che tenne a Copenhagen fu la conferma di quanto dichiarava Bohr a chi giungeva in visita dall'America: in Europa le novità matematiche si riducevano a un nome: «Selberg!». Alla conferenza parlò delle proprie idee sull'ipotesi di Riemann. Benché avesse dato un contributo importante sulla strada che conduceva a una sua dimostrazione, Selberg sottolineò che gli elementi a sostegno della fondatezza dell'ipotesi di Riemann erano ancora molto scarsi. «Penso che la ragione per cui all'epoca eravamo portati a credere alla validità dell'ipotesi di Riemann fosse sostanzialmente il fatto che essa produce la distribuzio-

ne più bella e semplice che si possa avere: la simmetria lungo la retta. Inoltre, l'ipotesi condurrebbe alla distribuzione più naturale dei numeri primi. Tendi a pensare che almeno qualcosa debba andare diritta in questo universo.»

Qualcuno travisò i suoi commenti, pensando che egli stesse mettendo in dubbio la validità dell'ipotesi di Riemann. Ma Selberg non era pessimista quanto Littlewood, il quale riteneva che la mancanza di prove concrete significasse che l'ipotesi di Riemann fosse falsa. «Ho sempre creduto fortemente nell'ipotesi di Riemann. Non scommetterei mai contro di essa. Ma in quella fase sostenevo che in realtà non disponevamo di risultati né numerici né teorici che indicassero con forza che l'ipotesi fosse vera. Quei risultati suggerivano piuttosto che l'ipotesi era perlopiù vera.» In altre parole, che probabilmente gli zeri giacevano per la maggior parte sulla retta, cioè proprio quello che Riemann aveva sostenuto di poter dimostrare quasi un secolo prima.

Il progresso compiuto da Selberg negli anni della guerra fu il canto del cigno della supremazia matematica europea. In seguito al suo successo, Selberg finì nelle mire di Hermann Weyl, un professore dell'Institute for Advanced Study di Princeton che era fuggito da Gottinga nel 1933, quando la situazione si stava deteriorando. Il matematico solitario che era rimasto in Europa e aveva sopportato le privazioni della Seconda guerra mondiale soccombette ai richiami provenienti dall'altra sponda dell'Atlantico. Selberg accettò l'invito a visitare l'istituto, eccitato dalla prospettiva di ottenerne nuove ispirazioni. Arrivò al porto di New York,

con la sua attività frenetica, e da lì raggiunse la cittadina sonnacchiosa di Princeton, poche decine di chilometri a sud di Manhattan.

Gli Stati Uniti dovevano trarre benefici immensi dall'afflusso di matematici di talento come Selberg da oltreoceano. Se un tempo l'attività matematica vi ristagnava, ormai l'America stava diventando la grande potenza che continua a essere oggi: la patria della matematica, un paradiso che attira matematici da tutto il globo. Fatta a pezzi dalle devastazioni provocate da Hitler e dalla Seconda guerra mondiale, la reputazione di Gottinga come mecca della matematica sarebbe risorta come la fenice a Princeton.

L'Institute for Advanced Study era stato fondato nel 1932 con l'aiuto di una donazione di cinque milioni di dollari da parte di Louis Bamberger e della sorella Caroline Bamberger Fuld. Il suo scopo era quello di attrarre i migliori studiosi del mondo offrendo loro un rifugio tranquillo e un salario generoso. Non a caso l'istituto si guadagnò il soprannome di Institute for Advanced Salaries. Il luogo cercava di replicare l'atmosfera tipica dei college di Oxford e Cambridge, in cui studiosi di tutte le discipline potevano interagire in modo fruttuoso.

Ma in contrasto con l'atmosfera stantia di quelle antiche sedi della cultura europea, a Princeton si respirava un'aria giovane e fresca, che scoppiava di vita e di idee. Se a Oxford o a Cambridge era considerata una gaffe parlare di lavoro alla Tavola alta, Princeton ignorava simili finezze. I membri dell'istituto parlavano apertamente del loro lavoro tutte le

volte che lo desideravano. Einstein la paragonò a una pipa non ancora annerita dal fumo. «Princeton è un luogo incantevole, un paesetto pittoresco e cerimonioso di gracili semidei su trampoli. Tuttavia, ignorando certe convenzioni sociali sono riuscito a crearmi un'atmosfera favorevole allo studio e libera da distrazioni. In questa cittadina universitaria le voci caotiche del conflitto umano non penetrano quasi.»

Benché fosse stato fondato per servire tutte le discipline, l'istituto era nato nella vecchia sede di matematica dell'università di Princeton. In seguito il dipartimento di matematica sarebbe stato trasferito nell'unico grattacielo di Princeton, portando con sé il proprio nome: Fine Hall. Probabilmente la prima sede dell'istituto contribuì a fare della matematica e della fisica i suoi punti di forza. Sopra il caminetto della sala professori della Fine Hall erano iscritte alcune parole che Einstein usava citare di frequente: «Raffiniert ist der Herr Gott, aber boshaft ist Er nicht» («Sottile è il Signore, ma non malizioso»). I matematici, però, erano assai più scettici riguardo alla veridicità di tale affermazione. Come Hardy aveva spiegato a Ramanujan, c'è «una diabolica malignità insita nei numeri primi».

L'istituto venne trasferito in una nuova sede nel 1940. Situato nei sobborghi di Princeton e circondato dai boschi, era completamente isolato dagli orrori che avevano luogo nel mondo. Einstein lo definì il suo esilio in paradiso. «Ho desiderato questo isolamento per tutta la vita e adesso l'ho finalmente ottenuto qui a Princeton.» Sotto molti aspetti l'istituto era uno specchio del suo precursore: l'università di Got-

tinga. La gente giungeva da ogni dove e finiva risucchiata nella sua comunità autosufficiente. Qualcuno direbbe che l'autosufficienza di Princeton crebbe fino a diventare autocompiacimento. Non solo aveva accolto i matematici di Gottinga, ma sembrava che si fosse appropriato anche del motto della cittadina tedesca: per i membri dell'istituto, non c'era vita fuori di Princeton. Appartato nei boschi, l'Institute for Advanced Study era l'ambiente di lavoro ideale per europei esiliati e in fuga.

Erdős, il mago di Budapest

All'istituto c'era un altro profugo europeo la cui vita si sarebbe intrecciata con quella di Selberg. Mentre la storia di Ramanujan ispirava il giovane Selberg in Norvegia, la sua magia agiva su un'altra giovane mente. L'ungherese Paul Erdős era destinato a diventare una delle figure matematiche più affascinanti della seconda metà del XX secolo. Ma a legare quei due giovani matematici non sarebbe stato soltanto Ramanujan. Fra di loro vi fu anche polemica.

Mentre a Selberg piaceva lavorare da solo, Erdős viveva di collaborazioni. La sua figura curva, in sandali e abito completo, era familiare nelle sale professori dei dipartimenti di matematica di tutto il mondo. Lo si poteva vedere ripiegato sopra un block-notes, con un nuovo collaboratore accanto, mentre indulgeva alla sua passione: creare e risolvere problemi numerici. Pubblicò più di millecinquecento articoli

scientifici nel corso della sua vita, un'impresa fenomenale. L'unico matematico ad aver scritto più di lui è Eulero. Erdős era un monaco della matematica che si sbarazzava di tutti i propri beni personali per timore che lo distraessero dalla sua missione. Regalava tutto il denaro che guadagnava agli studenti o come premio per chi forniva le risposte alle tante questioni che poneva. Come per Hardy prima di lui, Dio aveva un ruolo importante anche se non convenzionale nella sua visione del mondo. Il «Supremo Fascista» era l'appellativo che dava al custode del «Grande Libro», un libro che conteneva i dettagli delle più eleganti dimostrazioni dei problemi matematici, risolti e non. Il massimo complimento di Erdős per una dimostrazione era: «Questa arriva dritta dal Libro!». Pensava che alla nascita tutti i bambini – o gli «epsilon», come li chiamava riferendosi alla lettera greca che in matematica si usa per indicare numeri molto piccoli – conoscessero la dimostrazione dell'ipotesi di Riemann contenuta nel Grande Libro. Il problema era che, dopo sei mesi, se la dimenticavano.

Erdős amava far matematica ascoltando musica, e spesso lo si poteva vedere ai concerti mentre prendeva freneticamente appunti in un quaderno, incapace di contenere l'eccitazione datagli da un'idea nuova. Nonostante fosse un grande collaboratore e odiasse star solo, aborriva il contatto fisico. Era il piacere mentale a sostenerlo, un piacere che alimentava con una dieta di caffè e compresse di caffeina. Secondo una sua definizione divenuta celebre, «un matematico è una macchina per trasformare il caffè in teoremi».

Come tantissimi altri grandi matematici, Erdős ebbe la fortuna di avere un padre che gli permise di assorbire idee che avrebbero stimolato la sua passione per i numeri. In un'occasione suo padre gli aveva spiegato il metodo con cui Euclide aveva dimostrato che esistono infiniti numeri primi. Ma l'episodio che lasciò Erdős davvero affascinato fu quando suo padre rigirò il ragionamento di Euclide per dimostrare che è possibile trovare sequenze di numeri di lunghezza arbitraria in cui non ci sono numeri primi.

Se volete una sequenza di 100 numeri consecutivi in cui non ci siano primi, non dovete far altro che prendere i numeri interi che vanno da 1 a 101 e moltiplicarli fra loro. Il risultato è un numero che si chiama il *fattoriale* di 101 (o 101 fattoriale) e che si scrive «100!». Dunque 101! risulterà certamente divisibile per tutti i numeri compresi fra 1 e 101. Ma se N è uno qualsiasi di questi numeri, allora $101! + N$ sarà anch'esso divisibile per N, dato che 101! e N sono entrambi divisibili per N. Perciò tutti i numeri $101! + 2$, $101! + 3$, ..., $101! + 101$ non sono numeri primi. In tal modo abbiamo ottenuto una sequenza di 100 numeri interi consecutivi nessuno dei quali è primo.

Quella conclusione suscitò l'interesse di Erdős. Quanto avrebbe dovuto contare partendo da 101 fattoriale o da un qualche altro numero prima di avere la garanzia di trovare un numero primo? Euclide aveva dimostrato che un numero primo prima o poi doveva esserci, ma sarebbe stato necessario attendere un tempo arbitrariamente lungo prima di trovarlo? Dopo tutto, se i numeri primi sono stati scelti dalla

Natura gettando una moneta, non c'è modo di sapere quanti lanci separano una «testa» dalla seguente. Naturalmente ottenere 1.000 volte di fila croce è molto improbabile. Ma non impossibile. Quando Erdős proseguì la sua esplorazione, si rese conto che sotto questo aspetto la distribuzione dei numeri primi *non* era riconducibile agli esiti del lancio di una moneta. È vero che i primi possono sembrare una massa caotica di numeri, ma il loro comportamento non è totalmente casuale.

Già nel 1845 il matematico francese Joseph Bertrand aveva azzardato un'ipotesi su quanto sia necessario procedere a contare per avere la certezza di trovare un numero primo. Secondo Bertrand, se si prende un numero qualsiasi, per esempio 1.009, e si continua a contare fino a raggiungere il doppio di quel numero, si dovrebbe avere la certezza di incontrare un numero primo lungo il percorso. In effetti fra 1.009 e 2.018 ci sono parecchi numeri primi, a cominciare da 1.013. Ma lo stesso sarebbe stato vero se si fosse scelto un numero N qualsiasi? Anche se Bertrand non riuscì a dimostrare che fra un numero N qualsiasi e il suo doppio $2N$ si incontrerà sempre almeno un numero primo, quella sua sensazionale predizione, fatta quando aveva ventitré anni appena, divenne nota con il nome di postulato di Bertrand.

A differenza dell'ipotesi di Riemann, il postulato di Bertrand non resistette a lungo irrisolto. A soli sette anni dalla sua formulazione, il matematico russo Pafnutij Čebyšev riuscì a dimostrarlo. Čebyšev utilizzò idee simili a quelle che aveva già impiegato per compiere le prime scorribande

all'interno del teorema dei numeri primi, quando aveva dimostrato che la stima di Gauss non si sarebbe mai discostata per più dell'undici per cento dal vero numero di numeri primi. I suoi metodi non erano sofisticati quanto quelli straordinari che aveva elaborato Riemann, ma erano comunque efficaci. Così Čebyšev riuscì a dimostrare che, a differenza di quello che accade con il lancio di una moneta, in cui non si è mai certi di quando l'esito sarà di nuovo croce, i numeri primi contengono sempre una piccola componente di prevedibilità.

Uno dei primi risultati che Erdős pubblicò nel 1931, quando aveva solo diciotto anni, fu una dimostrazione inedita del postulato di Bertrand. Ma rimase profondamente deluso quando qualcuno lo indirizzò all'opera di Ramanujan ed egli scoprì che la sua dimostrazione non era nuova quanto aveva sperato. Una delle ultime imprese matematiche di Ramanujan era stata un'argomentazione che semplificava moltissimo la dimostrazione del postulato di Bertrand ideata da Čebyšev. Anche se il giovane Erdős era rimasto piuttosto turbato, la gioia di aver scoperto Ramanujan compensò abbondantemente il suo sconforto.

Erdős decise di provare a vedere se riuscisse a far meglio di Ramanujan e di Čebyšev. Cominciò a osservare quanto poteva essere grande lo spazio che divide due numeri primi. Il problema della differenza fra numeri primi successivi avrebbe continuato ad affascinarlo per tutta la vita. Era famoso per offrire ricompense in denaro per la dimostrazione delle sue congetture. La seconda somma più consistente che egli

mise mai in palio, 10.000 dollari, era destinata a chi avesse dimostrato la sua congettura relativa alla reale distanza che separa numeri primi consecutivi. A oggi il problema rimane insoluto e il premio in denaro può essere ancora reclamato, anche se Erdős non è più vivo e non potrebbe apprezzare la dimostrazione. Ma come egli amava dire scherzando, il lavoro che era necessario fare per conquistarsi uno dei suoi premi violava probabilmente la legge sul minimo salariale. Una volta, in un momento di avventatezza, offrì il fattoriale di dieci miliardi di dollari per la dimostrazione di una congettura che generalizzava il teorema dei numeri primi di Gauss (il fattoriale di 10 miliardi è il prodotto di tutti i numeri compresi fra 1 e 10 miliardi). 100 fattoriale è già un numero maggiore del numero degli atomi dell'universo, ed Erdős tirò un gran sospiro di sollievo quando, negli anni Sessanta, il matematico che aveva trovato una dimostrazione della congettura non reclamò il premio.

Appena arrivato all'Institute for Advanced Study, verso la fine degli anni Trenta, Erdős diede prova delle proprie doti. Mark Kac era un esule polacco in fuga dalle tempeste che si addensavano sull'Europa. Benché si interessasse di teoria della probabilità, Kac aveva annunciato una conferenza che destò l'interesse di Erdős. Kac avrebbe parlato di una funzione che permetteva di calcolare quanti numeri primi distinti sono divisori di un numero intero qualsiasi. Per fare un esempio, $15 = 3 \times 5$ è divisibile per due numeri primi distinti (3 e 5), mentre $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ è divisibile per un solo numero primo (2). Perciò a ciascun numero si può associare

un punteggio in base a quanti sono i numeri primi distinti per cui è divisibile.

Erdős ricordava che Hardy e Ramanujan si erano interessati al modo in cui variavano quei punteggi. Ma ci voleva uno statistico come Kac per capire che essi seguivano un comportamento completamente casuale. Kac si rese conto che se si fossero riportati su un grafico i punteggi ottenuti da ciascun numero in successione, il grafico avrebbe assunto la forma ben nota agli statistici di una curva a campana, la firma inconfondibile di una distribuzione casuale. Benché avesse riconosciuto quel comportamento peculiare della funzione contando il numero dei numeri primi distinti con cui era possibile costruire ciascun numero, Kac non possedeva gli strumenti propri della teoria dei numeri che erano necessari per dimostrare la sua intuizione su quell'andamento casuale. «Enunciai per la prima volta la congettura durante una conferenza che tenni a Princeton nel marzo 1939. Per mia fortuna, e presumibilmente per fortuna della matematica, fra il pubblico c'era Erdős, che si animò immediatamente. Prima della fine della conferenza aveva completato la dimostrazione.»

Per Erdős quel successo fu l'inizio di una passione che l'avrebbe accompagnato per tutta la vita: combinare teoria dei numeri e teoria della probabilità. A prima vista queste due discipline sembrano diverse quanto il giorno e la notte. «La probabilità non è un concetto proprio della matematica pura, ma della filosofia o della fisica» aveva dichiarato una volta Hardy con sprezzo. Gli oggetti studiati dai teorici dei nume-

ri sono scolpiti nella pietra fin dall'inizio dei tempi, immobili e immutabili. Come diceva Hardy, 317 è un numero primo che ci piaccia o no. La teoria della probabilità, d'altra parte, è la più scivolosa delle discipline. Non puoi mai essere sicuro di ciò che sta per accadere.

Zeri ordinati significano numeri primi casuali

Benché già Gauss avesse utilizzato l'idea del lancio di una moneta per tentare una stima del numero di numeri primi, fu solo nel XX secolo che i matematici si convinsero a prendere in considerazione la possibilità di unire le discipline distinte del calcolo delle probabilità e della teoria dei numeri. Nei primissimi decenni del secolo i fisici avanzarono l'ipotesi che il caso fosse parte integrante del mondo subatomico. Può ben darsi che il comportamento di un elettrone sia assimilabile a quello di una minuscola palla da biliardo, ma non si può mai essere troppo sicuri di dove questa palla sia posizionata. Anche se a quel tempo molti fisici facevano fatica ad accettarlo, sembra proprio che sia un dado quantistico a stabilire dove si troverà un elettrone. Forse le conseguenze inquietanti della nascente teoria della fisica quantistica e del modello probabilistico del mondo che se ne deduceva contribuirono a mettere in dubbio l'opinione secondo cui il caso non avrebbe giocato alcun ruolo per delle entità fortemente deterministiche quali sono i numeri primi. Mentre Einstein cercava di negare che Dio giocasse a dadi con la Na-

tura, a pochi passi da lui, nell'Institute for Advanced Study, Erdős stava dimostrando che al cuore della teoria dei numeri c'era un lancio di dadi.

In effetti, fu durante quel periodo che i matematici iniziarono a capire come l'ipotesi di Riemann, che riguardava il comportamento irreggimentato degli zeri nel paesaggio zeta, riuscisse a spiegare perché i numeri primi appaiono così sregolati e casuali. Il miglior modo per comprendere la tensione fra l'ordine degli zeri e il caos dei numeri primi è dare uno sguardo più approfondito al modello quintessenziale di casualità: il lancio di una moneta.

Se lanciate una moneta un milione di volte, dovreste ottenere metà delle volte testa e metà delle volte croce. Ma non aspettatevi una perfetta parità. Con una moneta «equa» – una moneta che si comporta in maniera perfettamente casuale, senza deviazioni sistematiche dalla media – non dovrebbe sorprendervi il fatto di constatare che i lanci hanno dato come esito testa circa 1.000 volte in più o in meno rispetto al valore previsto di 500.000. La teoria della probabilità fornisce un modo per misurare l'entità di questo errore nel caso di esperimenti alla cui origine ci siano processi casuali. Se la moneta viene lanciata N volte, ci sarà una qualche deviazione – un «errore» per eccesso o per difetto – dal valore teorico di $\frac{1}{2}N$. Nel caso di una moneta equa, l'analisi di questo errore ha portato a concludere che esso deve essere nell'ordine della radice quadrata di N. Così, per esempio, se si lancia una moneta equa 1.000.000 di volte, è altamente probabile che si ottenga testa un numero di volte compreso

fra 499.000 e 501.000 (essendo 1.000 la radice quadrata di 1.000.000). Se invece la moneta fosse «sbilanciata», cioè tale da favorire un esito dei lanci piuttosto che l'altro, allora ci si dovrebbe aspettare un errore decisamente maggiore della radice quadrata di N.

Per la sua stima del numero di numeri primi, Gauss aveva preso a modello il lancio di una moneta speciale. La probabilità che all'N-esimo lancio questa teorica moneta desse come risultato testa – ovvero che N fosse un numero primo – non era uguale a $\frac{1}{2}$, ma a $1/\log(N)$. Tuttavia, così come l'esito dei lanci di una moneta convenzionale non è esattamente per metà delle volte testa e per metà croce, la moneta dei numeri primi lanciata dalla Natura non forniva l'esatto numero di numeri primi che Gauss aveva previsto. Ma quali caratteristiche aveva l'errore? Restava entro i limiti dello scostamento dal valore atteso di una moneta che si comporta in modo causale, oppure mostrava una forte tendenza a produrre numeri primi in particolari aree numeriche e a lasciare altre aree sguarnite?

La risposta si trova nell'ipotesi di Riemann e nel modo in cui essa predice l'ubicazione degli zeri. Questi punti a livello del mare controllano gli errori presenti nella stima del numero di numeri primi data da Gauss. Ogni zero con coordinata est-ovest uguale a $\frac{1}{2}$ produce un errore pari a $N^{1/2}$ (che è un altro modo di scrivere radice quadrata di N). Perciò se Riemann aveva ragione sulla posizione degli zeri, allora lo scostamento fra la stima del numero di numeri primi non maggiori di N data da Gauss e il loro vero numero risulta al

più dell'ordine della radice quadrata di *N*. Questo è il margine d'errore previsto dalla teoria della probabilità nel caso di una moneta equa, il cui comportamento non è affetto da deviazioni sistematiche.

Se invece l'ipotesi di Riemann è falsa ed esistono degli zeri posizionati più a est della retta critica passante per $\frac{1}{2}$, questi zeri produrranno un errore molto più grande della radice quadrata di *N*. Sarebbe come una moneta che in una serie di lanci dia come esito testa molto più spesso di quel cinquanta per cento atteso quando si utilizza una moneta equa. Quanto più a est si trovano degli zeri, tanto più è sbilanciata la moneta dei numeri primi.

Una moneta equa produce un comportamento realmente casuale, mentre una moneta sbilanciata produce un andamento riconoscibile. Perciò l'ipotesi di Riemann coglie perfettamente la ragione per la quale i numeri primi appaiono distribuiti in modo tanto casuale. Grazie alla sua brillante intuizione, Riemann era riuscito a ribaltare completamente questa casualità scoprendo il nesso fra gli zeri del suo paesaggio e i numeri primi. Per dimostrare che la distribuzione dei numeri primi è realmente casuale, è necessario dimostrare che oltre lo specchio di Riemann gli zeri sono disposti ordinatamente lungo la sua retta critica.

A Erdős quest'interpretazione probabilistica dell'ipotesi di Riemann piaceva. In primo luogo, essa rammentava ai matematici il motivo originario per cui si erano avventurati nel mondo oltre lo specchio di Riemann. Erdős voleva incoraggiare un ritorno a ciò che costituiva l'oggetto di studio

fondamentale della teoria dei numeri: i numeri, appunto. La cosa sorprendete era che, da quando il cunicolo spazio-temporale di Riemann si era aperto e aveva risucchiato i matematici in un mondo nuovo, i teorici dei numeri che parlavano di numeri erano sempre meno. Erano molto più preoccupati di esplorare la geometria del paesaggio zeta di Riemann, alla ricerca dei punti a livello del mare, che non di parlare degli stessi numeri primi. Erdős compì un'inversione di marcia. E presto scoprì di non essere solo in quel viaggio a ritroso.

Polemica matematica

Benché Selberg fosse affascinato soprattutto dal paesaggio zeta di Riemann, a Princeton il suo interesse si stava allontanando dalla funzione zeta per focalizzarsi più direttamente sui numeri primi. Al suo esodo matematico in America si accompagnò un ritorno al lato più concreto dello specchio di Riemann.

Dopo la dimostrazione del teorema dei numeri primi da parte di de la Vallée-Poussin e di Hadamard, i matematici avevano tentato invano di trovare un modo più semplice per dimostrare la validità del nesso stabilito da Gauss fra logaritmi e numeri primi. Era solo attraverso strumenti altamente sofisticati quali la funzione zeta di Riemann e il suo paesaggio immaginario che si sarebbe potuta dimostrare l'esattezza della stima del numero di numeri primi data da Gauss? Or-

mai i matematici erano disposti ad ammettere che con ogni probabilità quegli strumenti erano necessari per dimostrare che la stima di Gauss era buona tanto quanto prevedeva l'ipotesi di Riemann, e cioè che l'errore non sarebbe mai stato superiore alla radice quadrata di *N*. E tuttavia ritenevano che dovesse esserci un modo più semplice per ricavare la prima stima approssimativa data da Gauss. Avevano sperato di riuscire a generalizzare l'approccio elementare con cui Čebyšev era riuscito a dimostrare che nel peggiore dei casi la stima di Gauss si discostava dell'undici per cento dal valore corretto. Ma con il passare del tempo, dopo aver tentato invano per cinquant'anni di trovare una dimostrazione più semplice, ci si cominciò a convincere che fosse inevitabile far ricorso agli strumenti sofisticati introdotti da Riemann e messi a frutto da de la Vallée-Poussin e Hadamard.

Hardy non pensava che esistesse una dimostrazione elementare. Non che non ne desiderasse una: i matematici perseguono la semplicità con la stessa tenacia con cui perseguono le dimostrazioni. Hardy stava solamente diventando pessimista e scettico sull'esistenza di una dimostrazione di quel tipo. Avrebbe apprezzato il contributo dato da Erdős e Selberg, i quali, appena pochi mesi dopo la sua morte nel 1947, trovarono un'argomentazione elementare che provava il nesso fra numeri primi e logaritmi. Ma la polemica che si sviluppò attorno all'attribuzione dei meriti per quella dimostrazione elementare lo avrebbe inorridito. La vicenda è stata narrata in svariate sedi, non ultime due biografie di Erdős. Considerando la gigantesca rete di collaboratori e corrispon-

denti che Erdős coltivò, unita alla reticenza di Selberg, non sorprende che nella maggioranza di questi resoconti prevalga il punto di vista di Erdős. Vale la pena, tuttavia, di dare un po' di spazio anche alla posizione di Selberg sulla questione.

Il primo a sfruttare il sofisticato strumento della funzione zeta fu Dirichlet, che lo utilizzò per confermare una delle intuizioni di Fermat. Dirichlet dimostrò che se si prende un calcolatore a orologio con N ore sul quadrante e vi si inseriscono i numeri primi, allora quel calcolatore segnerà l'una un numero infinito di volte. In altre parole, esistono infiniti numeri primi che divisi per N danno resto 1. La dimostrazione di Dirichlet si basava su un uso complesso della funzione zeta. La sua dimostrazione fece da catalizzatore per le grandi scoperte di Riemann.

Ma nel 1946, quasi centodieci anni dopo la scoperta di Dirichlet, Selberg concepì una dimostrazione elementare del teorema di Dirichlet, una dimostrazione che era più vicina nello spirito a quella con cui Euclide aveva provato l'esistenza di infiniti numeri primi. La dimostrazione di Selberg, evitando la funzione zeta, rappresentò un'importante svolta psicologica in un'epoca in cui molti ritenevano che fosse impossibile compiere un qualsiasi progresso nella teoria dei numeri primi senza far ricorso alle idee di Riemann. Per quanto sottile, la dimostrazione non richiedeva nessuno degli strumenti sofisticati della matematica del XIX secolo, ed è del tutto plausibile che gli stessi antichi greci l'avrebbero compresa.

Paul Turán, un matematico ungherese in visita all'istituto di Princeton, aveva stretto amicizia con Selberg durante il

periodo che i due avevano trascorso insieme. Era anche un buon amico di Erdős. Un suo articolo scritto in collaborazione con Erdős era l'unico documento di riconoscimento che era stato in grado di esibire quando una pattuglia di militari sovietici lo aveva fermato nelle strade di Budapest liberata, nel 1945. Gli uomini della pattuglia rimasero comprensibilmente impressionati e a Turán fu risparmiata una gita al gulag. «Fu un'applicazione inaspettata della teoria dei numeri» ci scherzò sopra in seguito.

Turán desiderava sapere qualcosa delle idee su cui si basava la dimostrazione di Selberg del risultato di Dirichlet, ma avrebbe dovuto lasciare l'istituto dopo avervi trascorso la primavera. Selberg fu lieto di mostrargli alcuni dei dettagli, e anzi propose a Turán di tenere una conferenza sulla dimostrazione mentre lui approfittava di una breve trasferta in Canada per rinnovare il visto di residenza. Ma quando ne discusse con Turán, scoprì le proprie carte un po' più di quanto non intendesse fare.

Durante la conferenza Turán citò una formula alquanto insolita che Selberg aveva dimostrato, una formula che non aveva direttamente a che fare con la dimostrazione del teorema di Dirichlet. Erdős, che era fra il pubblico, capì che quella formula era proprio ciò di cui aveva bisogno per perfezionare il postulato di Bertrand, secondo cui c'è sempre un numero primo nell'intervallo fra N e $2N$. Ciò che Erdős stava cercando di fare era verificare se fosse proprio necessario procedere da N fino a 2 volte N per essere sicuri di incontrare un numero primo. Non sarebbe stato possibile, per esempio,

trovare un numero primo nell'intervallo compreso fra N e 1,01 volte N? Egli si rendeva conto che questo non sarebbe potuto accadere per ogni valore di N. Dopo tutto, se N è uguale a 100, non esistono numeri interi, né tanto meno numeri primi, compresi nell'intervallo fra 100 e 101 (che è uguale a 100 moltiplicato per 1,01). Tuttavia Erdős pensava che una volta raggiunti valori di N sufficientemente grandi, allora, nello spirito del postulato di Bertrand, si sarebbe sempre trovato un numero primo compreso fra N e 1,01N. D'altra parte 1,01 non aveva niente di speciale. L'idea di Erdős era che lo stesso sarebbe stato vero per qualsiasi valore numerico compreso fra 1 e 2 si fosse scelto. Avendo assistito alla conferenza di Turán, Erdős comprese che la formula di Selberg gli forniva l'elemento necessario a completare la dimostrazione del postulato.

«Quando tornai, Erdős mi disse che intendeva usare la mia formula per una dimostrazione elementare di questa generalizzazione del postulato di Bertrand, e mi chiese se non avessi nulla in contrario.» Era un risultato a cui lo stesso Selberg aveva pensato, ma che non l'aveva condotto da nessuna parte. «Siccome non stavo occupandomi di quel problema, gli dissi che non avevo obiezioni.» In quel periodo Selberg era distratto da una moltitudine di problemi pratici. Doveva rinnovare il suo visto, trovare un alloggio a Syracuse, dove aveva accettato un incarico per l'anno accademico entrante, e preparare le lezioni per la scuola estiva per ingegneri in cui insegnava. «In ogni caso, Erdős era sempre piuttosto svelto a fare le cose e riuscì a trovare una dimostrazione.»

Ora, c'erano alcune cose che Selberg non aveva rivelato a Turán. In particolare, c'era un motivo se anche lui aveva pensato a quella generalizzazione del postulato di Bertrand: aveva capito come inserirla in un puzzle per ottenere il quadro completo di una dimostrazione elementare del teorema dei numeri primi. Grazie al risultato di Erdős, adesso Selberg era entrato in possesso dell'ultima tessera di quel puzzle.

Spiegò a Erdős come aveva utilizzato il suo risultato per completare una dimostrazione elementare del teorema dei numeri primi. Erdős suggerì di presentare insieme il lavoro al piccolo gruppo di colleghi che aveva assistito alla conferenza di Turán. Ma non riuscì a tenere a freno il proprio entusiasmo e si mise a mandare inviti a destra e a manca per quella che prometteva sarebbe stata una conferenza molto interessante. Selberg non si era aspettato un pubblico così ampio.

> Quando arrivai là nel tardo pomeriggio, verso le quattro o le cinque, la sala era strapiena. Così salii sul podio ed esposi l'argomentazione e poi chiesi a Erdős di esporre la sua parte. Dopodiché ripresi la parola per esporre il resto, cioè la parte necessaria a completare la dimostrazione. Perciò la prima dimostrazione fu ottenuta utilizzando questo risultato intermedio che lui aveva ottenuto.

Erdős gli propose di scrivere insieme un articolo sulla dimostrazione. Ma, come spiega Selberg,

> non avevo mai pubblicato articoli scritti in collaborazione. Avrei davvero voluto che scrivessimo articoli separati, ma Erdős insisteva che si sarebbero dovute fare le cose come le avevano fatte Hardy e Littlewood. Io però non avevo mai acconsentito a lavorare in collaborazione. Prima di venire negli Stati Uniti avevo svolto tutta la mia attività matematica in Norvegia. L'avevo svolta da solo, senza nemmeno parlarne con qualcuno [...] no, non ero mai stato un collaboratore in quel senso. Parlo con le persone ma lavoro da solo, che è poi quello che si addice al mio temperamento.

La verità è che quello era l'incontro fra due matematici con temperamenti opposti. Uno era un solitario interamente autosufficiente che in tutta la sua vita ha scritto un unico articolo insieme a un collega, il matematico indiano Saravadam Chowla. L'altro portò la collaborazione a tali estremi che oggi i matematici parlano del loro «numero di Erdős», il numero di coautori che li legano a una pubblicazione scritta con Erdős. Il mio numero di Erdős è 3, il che significa che ho scritto un articolo con qualcuno che ha scritto un articolo con qualcuno che ha scritto un articolo con Erdős. Poiché Chowla fu uno dei 507 coautori di Erdős, l'unico articolo che Selberg abbia mai scritto in collaborazione, gli conferisce un numero di Erdős uguale a 2. I matematici che hanno un numero di Erdős pari a 2 sono oltre cinquemila.

Dopo quel rifiuto, come Selberg oggi ammette, «le cose sfuggirono di mano». Entro il 1947 Erdős aveva costruito una rete estensiva di collaboratori e di corrispondenti. Li te-

neva aggiornati sui propri progressi matematici inviando cartoline a raffica. Si dice che Selberg ricevette il colpo mortale quando, al suo arrivo a Syracuse, fu salutato da un membro della facoltà che gli chiese: «Ha sentito la notizia? Erdős e un matematico scandinavo hanno ideato una dimostrazione elementare del teorema dei numeri primi». Nel frattempo Selberg aveva formulato un'argomentazione alternativa che evitava la necessità di ricorrere al passo intermedio fornitogli da Erdős. Decise di procedere e pubblicò i risultati di quel lavoro da solo. Il suo articolo apparve sugli «Annals of Mathematics», la pubblicazione redatta a Princeton che per consenso generale è considerata una delle tre riviste matematiche più importanti al mondo. È negli «Annals of Mathematics», per esempio, che Andrew Wiles ha pubblicato la sua dimostrazione definitiva dell'ultimo teorema di Fermat.

Erdős era furioso. Chiese a Hermann Weyl di fare da arbitro sulla questione. Selberg racconta: «Mi dà soddisfazione il fatto che alla fine Hermann Weyl si schierò sostanzialmente dalla mia parte dopo aver sentito entrambe le campane». Erdős pubblicò la sua dimostrazione riconoscendo il ruolo di Selberg. Ma l'intero episodio fu molto deplorevole. A dispetto della natura astratta della matematica, i matematici possiedono ego che hanno bisogno di essere blanditi. Non c'è nulla che stimoli il processo creativo di un matematico quanto il pensiero dell'immortalità che conferisce il fatto di avere il proprio nome associato a un teorema. La vicenda di Erdős e Selberg evidenzia l'importanza che hanno in matematica – e, di fatto, in tutta la scienza – il riconoscimento

dei meriti e la priorità. È per questo che Wiles passò sette anni chiuso nel suo attico a lavorare in segreto sull'ultimo teorema di Fermat, per timore di dover dividere la gloria dell'impresa.

Anche se i matematici sono come i corridori di una squadra di staffetta che si passano il testimone da una generazione all'altra, nondimeno anelano sempre alla gloria individuale che riceveranno tagliando la linea del traguardo per primi. La ricerca matematica è un difficile atto d'equilibrismo fra la necessità di collaborare in progetti che possono abbracciare secoli e la brama d'immortalità.

Dopo qualche tempo fu chiaro che la dimostrazione elementare del teorema dei numeri primi ottenuta da Selberg non era quello straordinario passo avanti che si era sperato fosse. Qualcuno pensava che quell'intuizione potesse aprire un percorso semplice per dimostrare l'ipotesi di Riemann. Dopo tutto, quell'intuizione poteva confermare che la differenza fra la stima di Gauss e il vero numero di numeri primi non avrebbe mancato mai il bersaglio di una distanza maggiore della radice quadrata di *N*. E si sapeva che ciò era equivalente ad avere tutti gli zeri posizionati disciplinatamente sulla retta di Riemann.

Alla fine degli anni Quaranta Selberg deteneva ancora il record della massima percentuale di zeri di cui era stata dimostrata la presenza sulla retta magica di Riemann. Questo fu uno dei risultati per i quali gli venne assegnata una medaglia Fields nel 1950. Hadamard, che allora aveva ottant'anni, avrebbe dovuto presenziare al Congresso internazionale

dei matematici che si sarebbe tenuto a Cambridge, nel Massachusetts, per celebrare il premio ricevuto da Selberg. Era particolarmente impaziente di incontrare l'esploratore che aveva scoperto un percorso elementare per raggiungere il campo base posto da lui e da de la Vallée-Poussin cinquant'anni prima. Tuttavia, sia a lui sia a Laurent Schwartz, l'altro matematico che doveva ricevere la medaglia Fields, fu negato il visto d'ingresso negli Stati Uniti: proprio allora il maccartismo stava cominciando a sollevare minaccioso il capo. Ci volle l'intervento del presidente Truman perché ai due matematici venisse accordata l'autorizzazione a entrare in America, a pochi giorni dall'inizio del Congresso.

In seguito altri matematici, aggiungendo le proprie ingegnose variazioni, hanno esteso le argomentazioni di Selberg per aumentare la percentuale degli zeri di cui possiamo dimostrare l'effettiva ubicazione sulla retta magica di Riemann. Alcune dimostrazioni di teoremi matematici si sviluppano in modo molto naturale una volta che si abbia un'idea generale della direzione in cui dirigersi. La parte difficile è trovare l'inizio del percorso. Migliorare la stima di Selberg, tuttavia, è decisamente diverso. Le dimostrazioni necessitano di un'analisi molto delicata. Non sono il risultato di una singola idea grandiosa, ma portarle a termine richiede una tremenda perseveranza. Il percorso è disseminato di trappole. Una mossa falsa e un numero che si pensava fosse maggiore di zero può trasformarsi d'improvviso in negativo. Ogni passaggio deve essere compiuto con grande attenzione, ed è facile che vi si insinuino degli errori.

Negli anni Settanta Norman Levinson migliorò le stime di Selberg e a un certo punto credette di essere riuscito a catturare ben il 98,6 per cento degli zeri. Levinson diede una copia del manoscritto con la dimostrazione a Giancarlo Rota, un suo collega del MIT, e gli disse scherzando di aver dimostrato che il 100 per cento degli zeri giacevano sulla retta: il manoscritto dava conto del 98,6 per cento, mentre il restante 1,4 per cento era lasciato al lettore. Rota pensò che parlasse sul serio e cominciò a diffondere la voce che Levinson aveva dimostrato l'ipotesi di Riemann. Naturalmente, se anche egli fosse arrivato davvero al 100 per cento, non ne conseguiva necessariamente che tutti gli zeri si trovassero sulla retta, dato che abbiamo a che fare con l'infinito. Ma questo non bastò a fermare le voci.

Alla fine, nel manoscritto fu individuato un errore che ridusse la porzione degli zeri individuati sulla retta al trentaquattro per cento. Fu tuttavia un record che resistette per qualche tempo, un risultato ancor più sorprendente se si considera che Levinson aveva ormai passato i sessant'anni quando lo raggiunse. Come dice Selberg, «dovette avere un gran bel coraggio per eseguire una tale massa di calcoli numerici, considerando che era impossibile sapere in anticipo se l'avrebbero portato da qualche parte». Si diceva anche che Levinson avesse grandi idee riguardo a come generalizzare i propri metodi, ma morì per un tumore al cervello prima di poterle mettere a frutto. Attualmente il record appartiene a Brian Conrey dell'università dell'Oklahoma, il quale nel 1987 ha dimostrato che il quaranta per cento degli zeri deve

cadere sulla retta. Conrey ha alcune idee su come perfezionare la propria stima, ma pochi punti percentuali in più non sembrano valere l'enorme quantità di lavoro che richiederebbero. «Ne varrebbe la pena se potessi portare la stima oltre il cinquanta per cento, perché in tal caso si potrebbe almeno dire che la maggioranza degli zeri si trova sulla retta.»

La polemica sull'attribuzione del merito per la dimostrazione elementare addolorò molto Erdős, ma egli rimase prolifico per tutta la vita, sfidando i miti sull'invecchiamento e il logorio matematico. Quando non riuscì a ottenere un incarico permanente all'Institute for Advanced Study, scelse la vita del matematico itinerante. Senza una casa né un posto di lavoro, preferiva piombare all'improvviso da uno dei suoi tanti amici sparsi per il mondo per indulgere al suo amore per la collaborazione, rimanendo spesso per varie settimane prima di andarsene altrettanto improvvisamente. Morì nel 1996, nel centenario della prima dimostrazione del teorema dei numeri primi. A ottantatré anni stava ancora collaborando a pubblicazioni con i suoi colleghi. Poco prima di morire disse: «Passerà un altro milione di anni almeno, prima che riusciremo a comprendere i numeri primi».

Oggi che è un ultranovantenne con i capelli bianchi, Selberg continua a leggere le ultime novità sull'ipotesi di Riemann e a partecipare ai convegni, dove offre perle di saggezza ai giovani delegati. Non sopporta gli sciocchi. Nel 1996, il suo discorso al congresso tenuto a Seattle per celebrare il centenario della dimostrazione del teorema dei numeri primi fu salutato dall'ovazione di seicento matematici.

Selberg ritiene che, nonostante gli importanti progressi compiuti, non abbiamo ancora alcuna idea concreta su come dimostrare l'ipotesi di Riemann:

> Penso che nessuno sappia con certezza se siamo vicini a una soluzione oppure no. Ci sono alcune persone che ritengono che ci stiamo avvicinando. Se una soluzione c'è, è ovvio che con il trascorrere del tempo vi ci stiamo avvicinando. Ma alcuni ritengono che possediamo gli elementi essenziali di una soluzione. Io non sono affatto d'accordo. La faccenda è molto diversa da Fermat. Non sono stati compiuti progressi paragonabili. È possibilissimo che l'ipotesi sopravviva al bicentenario del 2059, ma naturalmente io non sarò lì per vederlo. Quanto resisterà il problema è impossibile dirlo. Penso però che alla fine una soluzione verrà trovata. Non penso che sia un risultato indimostrabile. Può anche darsi, tuttavia, che la dimostrazione sia così intricata che il cervello umano non riuscirà a raggiungerla.

Nella conferenza tenuta a Copenhagen dopo la guerra, Selberg aveva sollevato dubbi sull'esistenza di prove concrete a favore della verità dell'ipotesi di Riemann. All'epoca, la possibilità di dimostrare l'ipotesi gli appariva un pio desiderio, ma oggi la sua opinione è cambiata. Secondo Selberg, le prove che sono emerse nei cinquant'anni trascorsi dalla fine della guerra sono ormai schiaccianti. Ma fu proprio la guerra, e in particolare i decrittatori di codici di Bletchley Park, a condurre allo sviluppo della macchina che avrebbe generato queste nuove prove: il computer.

8

Macchine della mente

Propongo di considerare la questione: «Le macchine possono pensare?».

Alan Turing, *Computing Machinery and Intelligence*

Il nome di Alan Turing sarà sempre associato alla decifrazione di Enigma, il codice segreto usato dai tedeschi durante la Seconda guerra mondiale. Nella tranquillità della grande villa di campagna di Bletchley Park, a metà strada fra Oxford e Cambridge, i decrittatori di codici di Churchill crearono una macchina che poteva decifrare i messaggi inviati ogni giorno dai servizi segreti tedeschi. La storia di come l'irripetibile combinazione di logica matematica e determinazione propria di Turing contribuì a salvare molte vite dalla minaccia degli U-Boot tedeschi è materia di romanzi, pièce teatrali e film. E tuttavia l'ispirazione che portò Turing a creare le sue «bombe», le macchine decrittatici, si può far risalire ai giorni matematici che egli trascorse a Cambridge, quando Hardy e Littlewood erano ancora sulla breccia.

Ancor prima che la Seconda guerra mondiale inghiottisse l'Europa, Turing stava già progettando macchine che avrebbero fatto saltare due dei ventitré problemi di Hilbert. La prima fu una macchina teorica, che esisteva soltanto nella sua mente, una macchina che avrebbe demolito ogni speranza di poter verificare la saldezza delle fondamenta dell'edificio matematico. La seconda macchina era molto concreta, fatta di ruote dentate e gocciolante d'olio, e con questa macchina Turing intendeva sfidare un'altra ortodossia matematica. Il suo sogno era che quel marchingegno meccanico potesse avere il potere di dimostrare l'infondatezza del problema che, fra i suoi ventitré problemi, Hilbert preferiva: l'ipotesi di Riemann.

Dopo anni durante i quali i suoi colleghi avevano tentato invano di dimostrare l'ipotesi di Riemann, Turing riteneva che forse era giunto il momento di indagare l'eventualità che Riemann si fosse sbagliato. Forse esisteva davvero uno zero fuori dalla retta critica di Riemann, e questo zero avrebbe prodotto forzatamente un qualche andamento riconoscibile nella sequenza dei numeri primi. Turing si rendeva conto che le macchine sarebbero diventate gli strumenti più efficaci per la ricerca degli zeri che potevano dimostrare l'infondatezza della congettura di Riemann. Grazie a lui, i matematici avrebbero goduto della collaborazione di un nuovo socio meccanico nella loro analisi dell'ipotesi di Riemann. Ma non furono solo le macchine materiali di Turing ad avere un impatto sull'esplorazione matematica dei numeri primi. Le sue macchine della mente, create in origine per attaccare il secondo problema di Hilbert, avrebbero portato verso la fine

del XX secolo al più inaspettato degli esiti: una formula per generare tutti i numeri primi.

Il fascino che le macchine esercitavano su Turing era stato stimolato da un libro che gli era stato regalato nel 1922, quando aveva dieci anni. *Natural Wonders Every Child Should Know* [«Meraviglie naturali che ogni bimbo dovrebbe conoscere»] di Edwin Tenney Brewster era zeppo di piccole perle che accesero l'immaginazione del giovane Alan. Pubblicato nel 1912, il libro insegnava che esistevano spiegazioni dei fenomeni naturali e non si limitava a nutrire i suoi giovani lettori di osservazioni passive. Se si considera la passione che Turing sviluppò in seguito per l'intelligenza artificiale, la descrizione degli esseri viventi data da Brewster è particolarmente illuminante:

> Poiché è ovvio che il corpo sia una macchina. È una macchina enormemente complessa, molte, molte volte più complicata di qualsiasi macchina sia mai stata costruita; ma comunque una macchina. La si è paragonata a una macchina a vapore. Ma questo accadeva prima che raggiungessimo le conoscenze che oggi abbiamo sul modo in cui funziona. In realtà è un motore a gas; come il motore di un'automobile, di una motobarca o di una macchina volante.

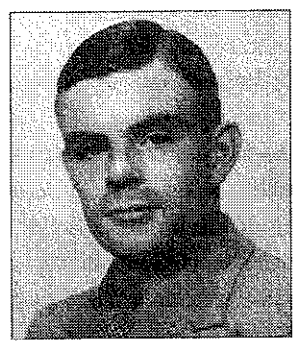
Anche a scuola Turing aveva l'ossessione di inventare e costruire oggetti: una macchina fotografica, una penna ricaricabile a inchiostro, persino una macchina per scrivere. Era una passione che avrebbe portato con sé a Cambridge, dove

andò nel 1931 per studiare matematica al King's College. Benché fosse timido e, in una certa misura, un asociale, come molti prima di lui Turing trovò conforto nelle certezze assolute che provvedeva la matematica. Ma la passione di costruire oggetti non lo abbandonò. Non avrebbe mai smesso di cercare la macchina fisica che potesse mettere a nudo il meccanismo di un qualche problema astratto.

La prima ricerca che Turing compì all'università fu un tentativo di comprendere una di quelle zone di confine in cui la matematica astratta entra in contatto che le bizzarrie della Natura. Il suo punto di partenza fu il problema pratico degli esiti dei lanci di una moneta. Il risultato finale fu una sofisticata analisi teorica degli esiti statistici di un qualsiasi esperimento casuale. Turing ci rimase male quando presentò la sua dimostrazione solo per scoprire che, come già era accaduto a Erdős e a Selberg, la sua prima ricerca replicava un risultato ottenuto una decina d'anni prima da un matematico finlandese, J.W. Lindeberg: il teorema del limite centrale.

In seguito i teorici dei numeri avrebbero scoperto che il teorema del limite centrale offre nuove prospettive per la stima del numero di numeri primi. Qualora venisse dimostrata, l'ipotesi di Riemann confermerebbe che lo scarto fra il vero numero di numeri primi e la stima di Gauss è uguale a quello che ci aspettiamo quando lanciamo una moneta equa. Ma il teorema del limite centrale rivelò che non è possibile descrivere perfettamente la distribuzione dei numeri primi utilizzando come modello il lancio di una moneta. I numeri primi non obbediscono alla più accurata misura del-

la casualità che il teorema del limite centrale ha reso possibile. La statistica si occupa in buona sostanza delle diverse angolazioni da cui valutare degli insiemi di dati. Grazie al punto di vista offerto dal teorema del limite centrale di Turing e Lindeberg, i matematici poterono rendersi conto del fatto che, pur avendo molto in comune, i numeri primi e i lanci di una moneta non erano esattamente la stessa cosa.



Alan Turing (1912-1954).

La dimostrazione del teorema del limite centrale ottenuta da Turing, sebbene non originale, era una prova sufficiente del suo potenziale, tanto che egli ottenne una *fellowship* al King's College alla precoce età di ventidue anni. Turing rimase in una certa misura un solitario all'interno della comunità matematica di Cambridge. Mentre Hardy e Littlewood battagliavano con i classici problemi della teoria dei numeri, Turing preferiva lavorare al di fuori del canone matematico. Invece di

leggere gli articoli matematici dei suoi colleghi, preferiva arrivare da solo alle proprie conclusioni. Come Selberg, rinunciò alle distrazioni di una vita accademica convenzionale.

Ma a dispetto del suo volontario isolamento, Turing non poté non rendersi conto della crisi che stava investendo tutta la matematica. A Cambridge si parlava del lavoro di un giovane matematico austriaco che aveva posto l'incertezza al centro di quella disciplina che aveva promesso sicurezza a Turing.

Gödel e i limiti del metodo matematico

Con il suo secondo problema, Hilbert aveva sfidato la comunità dei matematici a dimostrare che la matematica non conteneva contraddizioni. Erano stati gli antichi greci a dare inizio allo sviluppo della matematica come disciplina basata sui teoremi e sulle dimostrazioni. Per farlo, erano partiti da asserzioni che sembravano verità lampanti. Queste asserzioni, gli assiomi della matematica, sono i semi da cui si è sviluppato l'intero giardino matematico. A partire dalle prime dimostrazioni di Euclide sui numeri primi, i matematici hanno utilizzato lo strumento della deduzione per estendere la nostra conoscenza oltre quegli assiomi.

Ma gli studi compiuti da Hilbert sulle geometrie non euclidee avevano sollevato una questione preoccupante. Siamo sicuri di non poter mai dimostrare che un enunciato è allo stesso tempo vero e falso? Possiamo avere la certezza assoluta del fatto che non esiste una sequenza di deduzioni che a partire

dagli assiomi della matematica dimostri la verità dell'ipotesi di Riemann mentre una sequenza alternativa ne dimostra la falsità? Hilbert nutriva pochi dubbi: sarebbe stato possibile usare la logica matematica per dimostrare che la matematica non conteneva contraddizioni di questo tipo. Riteneva che risolvere il secondo dei suoi ventitré problemi significasse sostanzialmente mettere ordine nell'edificio matematico. La questione assunse un carattere appena un po' più urgente quando Bertrand Russell, il filosofo amico di Hardy e Littlewood, produsse quelli che sembravano paradossi matematici. Anche se nella sua monumentale opera *Principia Mathematica* Russell trovò il modo di risolvere quei paradossi, quel fatto fece capire a molti la serietà della questione posta da Hilbert.

Il 7 settembre 1930, Hilbert ebbe il privilegio di diventare cittadino onorario di Königsberg, l'amata città che gli aveva dato i natali. Era l'anno in cui aveva lasciato la cattedra di Gottinga. Hilbert terminò il proprio discorso di ringraziamento con un appello pressante rivolto a tutti i matematici: «Wir müssen wissen. Wir werden wissen» («Noi dobbiamo sapere. Noi sapremo»). Dopo aver fatto il suo discorso, Hilbert fu condotto in fretta e furia in uno studio radiofonico per registrarne l'ultima parte, che sarebbe stata diffusa nell'etere. Fra i crepitii della registrazione si può avvertire Hilbert che ride dopo aver dichiarato: «Noi dobbiamo sapere». Ma era lui a non sapere che la risata finale c'era stata il giorno precedente, durante una conferenza che si era tenuta a pochissima distanza da quello studio radiofonico, all'università di Königsberg. Kurt Gödel, un logico austriaco venticin-

quenne, aveva fatto un annuncio che colpiva al cuore la visione del mondo di Hilbert.

Da piccolo Gödel si era guadagnato il soprannome di «Herr Warum» – Signor Perché – a causa dell'incessante flusso di domande che faceva. Un attacco di febbre reumatica durante l'infanzia gli lasciò un cuore debole e un'ipocondria incurabile. Negli ultimi anni di vita, la sua ipocondria si trasformò in paranoia manifesta. Era così convinto che lo volessero avvelenare che si lasciò letteralmente morire di fame. Ma a venticinque anni era stato lui ad avvelenare il sogno di Hilbert e a produrre un attacco di paranoia nell'intera comunità matematica.

Kurt Gödel (1906-1978) con Albert Einstein nel 1950.

Per la sua dissertazione di laurea, Gödel aveva rivolto il proprio spirito indagatore alla questione di Hilbert che andava al cuore dell'attività matematica. Gödel dimostrò che i matematici non avrebbero mai potuto dimostrare di essere in possesso di quelle salde fondamenta che Hilbert implorava. Era impossibile usare gli assiomi della matematica per dimostrare che quegli assiomi non avrebbero mai condotto a delle contraddizioni. Ma allora non si sarebbe potuto porre rimedio cambiando gli assiomi o aggiungendone altri? Niente da fare. Gödel dimostrò che, qualsiasi fossero gli assiomi scelti per la matematica, non sarebbe mai stato possibile usarli per dimostrare che non sarebbero mai sorte delle contraddizioni.

I matematici definiscono *coerente* un sistema di assiomi se tali assiomi non conducono a contraddizioni. È possibile che gli assiomi scelti non producano mai contraddizioni, ma non lo si potrà mai dimostrare utilizzando quegli stessi assiomi. È possibile che si riesca a dimostrare la coerenza di un sistema di assiomi scegliendo un sistema alternativo, ma sarebbe una vittoria parziale, dato che in tal caso la coerenza del nuovo sistema di assiomi sarebbe altrettanto opinabile. È come il tentativo compiuto da Hilbert di dimostrare che la geometria era coerente trasformandola in una teoria dei numeri: il solo risultato fu quello di spostare la questione sulla coerenza dell'aritmetica.

La presa di coscienza di Gödel riporta alla mente la descrizione dell'universo data da una signora anziana e minuta con cui si apre il libro di Stephen Hawking *Dal big bang ai buchi neri*. Al termine di una conferenza pubblica di astronomia la

vecchia signora si alza e, rivolta all'oratore, dichiara: «Quel che lei ci ha raccontato sono tutte frottole. Il mondo, in realtà, è un disco piatto che poggia sul dorso di una gigantesca tartaruga». La replica della signora alla domanda rivoltale dal conferenziere su quale fosse dunque la base d'appoggio della tartaruga, avrebbe prodotto un sorriso sulla faccia di Gödel: «Lei è molto intelligente, giovanotto, davvero molto intelligente. Ma è ovvio che ogni tartaruga poggia su un'altra tartaruga!».

Gödel aveva fornito alla matematica una dimostrazione del fatto che l'universo matematico poggiava su una torre di tartarughe. È possibile avere una teoria priva di contraddizioni ma non è possibile *dimostrare* che all'interno di quella teoria non ci sono contraddizioni. Tutto quello che si può fare è dimostrarne la coerenza all'interno di un altro sistema la cui stessa coerenza, però, non può essere dimostrata. C'era dell'ironia in tutto questo: la matematica poteva essere utilizzata per dimostrare i limiti delle stesse dimostrazioni. Il matematico francese André Weil sintetizzò la situazione dopo Gödel in una frase memorabile: «Dio esiste perché la matematica è coerente, e il demonio esiste perché non possiamo dimostrare che lo è».

Nel 1900 Hilbert aveva dichiarato che in matematica non c'è nulla che sia «inconoscibile». Trent'anni dopo, Gödel dimostrò che l'ignoranza è parte integrante della matematica. Hilbert venne a sapere della notizia bomba di Gödel qualche mese dopo il giorno del suo discorso a Königsberg. Sembra che reagì «con una certa irritazione». La sua dichiarazione «Wir müssen wissen. Wir werden wissen», rilasciata il giorno

dopo l'annuncio di Gödel, trovò una sede appropriata. Fu incisa sulla lapide della tomba di Hilbert, un sogno idealistico da cui, alla fine, la matematica si era risvegliata.

In un periodo in cui i fisici stavano apprendendo dal principio d'indeterminazione di Heisenberg che esistevano dei limiti alle conoscenze possibili nella loro disciplina, la dimostrazione di Gödel significava che anche i matematici avrebbero dovuto rassegnarsi a convivere per sempre con una propria peculiare indeterminazione: il dubbio di poter scoprire all'improvviso che l'intero edificio della matematica era un miraggio. Naturalmente per la gran parte dei matematici il fatto che ciò non sia ancora accaduto è la miglior conferma che non accadrà. Abbiamo un modello funzionante, e ciò sembra sufficiente a giustificare la coerenza della matematica. Ma siccome in definitiva tale modello è infinito, non possiamo avere la certezza che a un certo punto non contraddirà i nostri assiomi. E, come abbiamo già visto, quando ci si spinge nelle aree più remote dell'universo numerico persino entità apparentemente innocenti quali sono i numeri primi possono nascondere delle sorprese, sorprese in cui non saremmo mai incappati se avessimo proceduto solo per esperimenti e osservazioni.

Gödel non si fermò lì. La sua dissertazione conteneva una seconda notizia bomba. Se gli assiomi della matematica *sono* coerenti, allora ci saranno sempre enunciati veri sui numeri che non possono essere dimostrati formalmente a partire da quegli assiomi. Questo andava contro il fondamento di ciò che la matematica aveva significato dall'antica Grecia in poi.

La dimostrazione era stata sempre considerata la strada che conduceva alla verità matematica. Ora Gödel aveva fatto a pezzi questa fede nel potere della dimostrazione. Qualcuno sperava che aggiungendo dei nuovi assiomi sarebbe stato possibile rappezzare l'edificio matematico. Ma Gödel dimostrò che quegli sforzi sarebbero stati vani. Per quanti assiomi nuovi si aggiungano alle fondamenta della matematica, rimarrà sempre qualche enunciato vero che è impossibile dimostrare.

Questo risultato prese il nome di teorema d'incompletezza di Gödel: qualsiasi sistema coerente di assiomi è necessariamente incompleto, nel senso che esisteranno sempre enunciati veri che non possono essere dedotti da tali assiomi. E per assisterlo in quell'atto di terrorismo matematico, Gödel si procurò niente meno che l'aiuto dei numeri primi. Li utilizzò per assegnare a ogni enunciato matematico un codice numerico identificativo: il numero di Gödel. Proprio analizzando questi numeri, Gödel riuscì a dimostrare che per una qualsiasi scelta di assiomi sarebbero sempre esistiti enunciati veri che non potevano essere dimostrati.

Il risultato ottenuto da Gödel fu un brutto colpo per i matematici di tutto il mondo. C'erano moltissimi enunciati sui numeri, e in particolare sui numeri primi, che sembravano veri ma che non si aveva la minima idea di come dimostrare. Goldbach: ogni numero pari è la somma di due numeri primi. Numeri primi gemelli: esistono infinite coppie di numeri primi la cui differenza è 2, come 17 e 19. Queste asserzioni erano condannate a non poter essere dimostrate utilizzando le fondamenta assiomatiche esistenti?

È innegabile che un tale stato di cose fosse snervante. Forse l'ipotesi di Riemann era semplicemente indimostrabile nell'ambito della descrizione assiomatica corrente di ciò che intendiamo per aritmetica. Molti matematici si consolarono pensando che tutto ciò che era davvero importante dovesse essere dimostrabile, che soltanto enunciati tortuosi e privi di un contenuto matematico apprezzabile sarebbero finiti fra gli enunciati indimostrabili di Gödel.

Ma Gödel non ne era così sicuro. Nel 1951 mise in dubbio il fatto che gli assiomi in uso fossero sufficienti per risolvere molti dei problemi della teoria dei numeri:

> Ci troviamo davanti a una serie infinita di assiomi che può essere estesa sempre più, senza che sia visibile alcun punto terminale [...] Se è vero che nella matematica d'oggi i livelli più elevati di questa gerarchia non si usano praticamente mai [...] non è affatto inverosimile che questa caratteristica della matematica contemporanea possa avere qualcosa a che fare con la sua incapacità di dimostrare alcuni teoremi fondamentali come, per esempio, l'ipotesi di Riemann.

Secondo Gödel, la matematica non era stata in grado di dimostrare l'ipotesi di Riemann perché i suoi assiomi non erano sufficienti per farlo. Può darsi che si debba allargare la base dell'edificio matematico per scoprire una matematica in cui questo problema diventa risolvibile. Il teorema d'incompletezza di Gödel modificò in maniera drastica la forma mentis delle persone. Se era impossibile stabilire la veridicità

di ipotesi come quella di Goldbach o quella di Riemann, allora forse quelle ipotesi erano semplicemente indimostrabili con gli strumenti logici e con gli assiomi che si applicavano per cercare di venirne a capo.

Allo stesso tempo, dovremmo fare attenzione a non enfatizzare troppo il significato dei risultati ottenuti da Gödel. Quelli non erano i rintocchi funebri della matematica. Gödel non aveva compromesso la verità di ciò che era già stato dimostrato. Quello che il suo teorema evidenziava era che la realtà matematica non si riduceva alla deduzione di teoremi a partire da assiomi. La matematica era più di una partita a scacchi. All'opera incessante di costruzione dell'edificio matematico si sarebbe dovuta accompagnare un'evoluzione continua delle fondamenta su cui l'edificio poggiava. A differenza della natura formale delle regole per la costruzione dell'edificio, l'evoluzione delle fondamenta si sarebbe basata sulle intuizioni dei matematici riguardo alla scelta degli assiomi che, a loro modo di vedere, potevano dare una descrizione migliore del mondo della matematica. Molti furono felici di salutare nel teorema di Gödel una conferma della superiorità della mente sullo spirito meccanicistico che era emerso dalla Rivoluzione industriale.

La miracolosa macchina della mente di Turing

La rivelazione di Gödel aveva aperto una questione del tutto nuova che cominciò ad affascinare sia Hilbert sia il giovane

Turing. C'era un modo per stabilire la differenza fra gli enunciati veri per i quali esistono dimostrazioni e quegli enunciati che, come Gödel aveva scoperto, pur essendo veri sono indimostrabili? Turing, nel suo stile pragmatico, cominciò a considerare la possibilità che esistesse una macchina in grado di risparmiare ai matematici il rischio di tentare di dimostrare un enunciato indimostrabile. Era possibile concepire una macchina che, quando vi si inserisse un qualsiasi enunciato, fosse in grado di stabilire se esso potesse essere dedotto dagli assiomi della matematica, pur senza produrre la dimostrazione? Se una macchina di questo tipo esistesse, la si potrebbe usare come una sorta di oracolo di Delfi, per avere la certezza che cercare di trovare una dimostrazione della congettura di Goldbach oppure dell'ipotesi di Riemann non è tempo sprecato.

La questione dell'esistenza di un simile oracolo non era tanto diversa dal decimo problema che Hilbert aveva posto all'alba del XX secolo. In quel problema, Hilbert aveva considerato la possibile esistenza di un metodo universale, di un algoritmo, in grado di decidere se una qualsiasi equazione avesse soluzioni oppure no. Hilbert stava concependo l'idea di un programma per computer prima che fosse stata avanzata l'idea stessa di un computer. Egli immaginò una procedura meccanica che potesse essere applicata all'equazione e rispondere «sì» oppure «no» alla domanda «questa equazione ha soluzioni?» senza bisogno di alcun intervento da parte di un operatore.

Tutto questo parlare di macchine era puramente teorico.

Nessuno ancora pensava a un oggetto fisico reale. Erano macchine della mente, metodi o algoritmi per produrre risposte. Era come se si fosse concepita l'idea del software prima che esistesse un hardware su cui farlo girare. Anche se la macchina di Hilbert fosse esistita, non avrebbe avuto alcuna utilità pratica, perché con ogni probabilità la quantità di tempo necessaria a tale macchina per stabilire se un'equazione qualsiasi avesse soluzioni sarebbe stata maggiore della vita dell'universo. Per Hilbert, l'esistenza di questa macchina aveva un'importanza filosofica.

L'idea di queste macchine teoriche atterriva molti matematici. Se fossero esistite, avrebbero di fatto estromesso dai giochi la figura del matematico. Non avremmo più avuto bisogno di affidarci all'immaginazione, all'intuito geniale della mente umana per produrre argomentazioni intelligenti. Il matematico avrebbe potuto essere rimpiazzato da un automa che con la forza bruta si sarebbe aperto un varco verso la soluzione di nuovi problemi senza dover fare alcun ricorso a nuovi e sottili modi di ragionamento. Hardy non nutriva il minimo dubbio sul fatto che una tale macchina non sarebbe mai potuta esistere. Il semplice pensiero che ce ne potesse essere una metteva in pericolo la sua stessa esistenza:

> Ovviamente un teorema simile non c'è ed è una gran fortuna, perché se ci fosse avremmo un insieme di regole meccaniche per la risoluzione di tutti i problemi matematici, e la nostra attività di matematici avrebbe termine. Solo un osser-

vatore esterno molto ingenuo può immaginare che i matematici compiano le loro scoperte girando la manopola di una qualche macchina miracolosa.

Il fascino esercitato su Turing dalle complicatezze delle idee di Gödel nasceva da una serie di conferenze che Max Newman, uno dei docenti di matematica di Cambridge, tenne nella primavera del 1935. Newman era stato a sua volta sedotto dalle questioni di Hilbert quando aveva sentito parlare il grande matematico di Gottinga durante il Congresso internazionale dei matematici svoltosi a Bologna nel 1928. Era la prima volta dalla fine delle Prima guerra mondiale che una delegazione di matematici tedeschi era stata invitata a un Congresso internazionale. Molti di loro si erano rifiutati di partecipare, ancora offesi per essere stati esclusi dal precedente congresso del 1924. Ma Hilbert si mise al di sopra di queste divisioni politiche e guidò una delegazione di sessantasette matematici tedeschi. Quando entrò nella sala delle conferenze per assistere alla sessione di apertura dei lavori, il pubblico si alzò in piedi ad applaudirlo. Hilbert rispose esprimendo un'opinione condivisa da molti matematici: «È un totale fraintendimento della nostra scienza creare differenze basate sui popoli e sulle razze, e i motivi per i quali lo si è fatto sono molto squallidi. La matematica non conosce razze [...] Per la matematica, l'intero mondo della cultura è una sola nazione».

Nel 1930, subito dopo aver saputo che il programma di Hilbert era stato completamente demolito da Gödel, in

Newman nacque il forte desiderio di esplorare alcuni degli aspetti più difficili delle idee di Gödel. Cinque anni dopo aveva acquisito una sicurezza sufficiente per annunciare una serie di lezioni sul teorema d'incompletezza di Gödel. Turing vi assistette, inchiodato alla sedia dalle tortuosità della dimostrazione di Gödel. Newman terminò il ciclo di lezioni con una domanda che avrebbe fatto da catalizzatore sia per le idee di Hilbert sia per quelle di Turing. Sarebbe stato possibile distinguere in qualche modo gli enunciati dimostrabili dagli enunciati indimostrabili? Hilbert battezzò quella questione «il problema della decidibilità».

Mentre ascoltava le lezioni di Newman sull'opera di Gödel, Turing si convinse che non era possibile costruire una macchina miracolosa in grado di compiere quelle distinzioni. Ma sarebbe stato difficile dimostrare che una tale macchina non poteva esistere. Dopo tutto, come si può sapere quali saranno i limiti futuri dell'ingegno umano? Senza dubbio si potrebbe riuscire a dimostrare che una specifica macchina non produrrà le risposte cercate, ma estendere quella conclusione a tutte le macchine possibili significherebbe negare l'imprevedibilità del futuro. Eppure Turing lo fece.

Fu il primo grande risultato ottenuto da Turing. Egli concepì l'idea di speciali macchine che sarebbe stato possibile far agire a tutti gli effetti come una persona o come una macchina che compie calcoli aritmetici. In seguito tali macchine sarebbero diventate note con il nome di *macchine di Turing*. Hilbert era stato piuttosto vago su ciò che egli intendeva per una macchina in grado di stabilire se un enunciato è dimo-

strabile oppure no. Ora, grazie a Turing, la questione posta da Hilbert era stata precisata. Se una delle macchine di Turing non poteva discriminare il dimostrabile dall'indimostrabile, allora nessun'altra macchina avrebbe potuto farlo. Ciò significava che le sue macchine erano potenti quanto bastava per affrontare la sfida posta dal problema della decidibilità di Hilbert?

Un giorno, mentre correva lungo gli argini del fiume Cam, Turing ebbe il secondo lampo d'illuminazione, e capì perché nessuna delle sue immaginarie macchine poteva essere realizzata in modo tale da essere in grado di distinguere fra gli enunciati che possedevano dimostrazioni e quelli che non ne possedevano. Mentre si concedeva una pausa per riprendere fiato, sdraiato sulla schiena in un prato nei pressi di Granchester, Turing comprese che un'idea già utilizzata con successo per rispondere a una domanda sui numeri razionali si sarebbe forse potuta applicare alla questione dell'esistenza di una macchina in grado di verificare la dimostrabilità.

L'idea di Turing si basava su una stupefacente scoperta fatta nel 1873 da Georg Cantor, un matematico tedesco di Halle. Cantor aveva scoperto che esistono tipi diversi di infinito. Anche se può sembrare una proposizione stramba, è realmente possibile accostare due insiemi infiniti e dire che uno è più grande dell'altro. Quando Cantor annunciò le sue conclusioni, negli anni Settanta dell'Ottocento, esse furono giudicate quasi blasfeme o, nel migliore dei casi, le farneticazioni di un folle. Per capire come si possano mettere a confronto due infiniti, immaginate una tribù il cui sistema di

conteggio si riduca a «uno, due, tre, molti». I membri della tribù sono in grado di stabilire chi è il più ricco fra loro pur non potendo valutare l'esatto valore delle ricchezze. Per esempio, se i polli sono il segno della ricchezza di un individuo, due persone non devono far altro che abbinare i propri polli. Chi esaurisce per primo i suoi polli è evidentemente il più povero dei due. Non occorre essere in grado di contare i polli per vedere che un gruppo è più numeroso dell'altro.

Sfruttando quest'idea, Cantor dimostrò che se si abbinano tutti i numeri interi con tutte le frazioni (come $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{101}$) è possibile far corrispondere a ogni frazione un numero intero e uno solo. Sembra paradossale, dato che in apparenza le frazioni sono molto più numerose dei numeri interi. E tuttavia Cantor trovò il modo di stabilire una corrispondenza esatta fra i due insiemi, così che nessuna frazione rimaneva priva di un compagno. Cantor formulò anche un'argomentazione ingegnosa per dimostrare che, al contrario, non c'era modo di appaiare tutte le frazioni con tutti i numeri *reali*, che comprendono, oltre ai numeri interi e alle frazioni, anche i numeri irrazionali, cioè π, $\sqrt{2}$ e tutti gli altri numeri con un'espansione decimale infinita e non periodica. Cantor dimostrò che ogni tentativo di accoppiare le frazioni con i numeri reali avrebbe lasciato inevitabilmente fuori una parte dei numeri irrazionali. Aveva dimostrato l'esistenza di due insiemi infiniti di dimensioni diverse.

Hilbert capì che Cantor stava creando una matematica autenticamente nuova. Dichiarò che le idee di Cantor sugli infiniti erano «il prodotto più straordinario del pensiero ma-

tematico, una delle realizzazioni più magnifiche dell'attività umana nel dominio del puramente intelligibile [...] Nessuno ci espellerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi». A riconoscimento di quelle idee pionieristiche, Hilbert dedicò a una questione posta da Cantor il primo della sua lista di ventitré problemi: esiste un insieme infinito di numeri che sia più grande dell'insieme delle frazioni ma più piccolo dell'insieme di tutti i numeri reali?

Fu la dimostrazione di Cantor del fatto che i numeri irrazionali sono più numerosi delle frazioni ad attraversare come un lampo la mente di Turing mentre se ne stava sdraiato al sole di Cambridge. Egli comprese all'improvviso che quel fatto poteva essere utilizzato per dimostrare che il sogno coltivato da Hilbert di una macchina in grado di verificare se un enunciato fosse dimostrabile era pura fantasia.

Turing iniziò ipotizzando che una delle sue macchine fosse in grado di decidere se un qualsiasi enunciato vero fosse dimostrabile. Con un procedimento elegante Cantor aveva dimostrato che, comunque si accoppiassero le frazioni con i numeri reali, l'abbinamento avrebbe sempre lasciato fuori qualche numero irrazionale. Turing adottò questa tecnica e la adoperò per produrre un enunciato vero «lasciato fuori», un enunciato, cioè, per il quale la sua macchina non avrebbe mai potuto stabilire l'esistenza di una dimostrazione. La bellezza del ragionamento di Cantor era data dal fatto che se si fosse cercato di modificare la macchina in modo che includesse l'enunciato mancante, ci sarebbe sempre stato un altro enunciato che sfuggiva all'analisi, proprio come il teorema

d'incompletezza di Gödel dimostrava che l'aggiunta di un nuovo assioma sarebbe servito soltanto a produrre qualche nuovo enunciato indimostrabile.

Turing si rendeva conto che la sua argomentazione era piena di insidie. Mentre tornava correndo al suo appartamento al King's College, la riesaminò punto per punto, vagliando ogni possibile lacuna. C'era un aspetto che lo preoccupava in particolare. Egli aveva dimostrato che nessuna delle sue macchine di Turing poteva dare una risposta al problema della decidibilità di Hilbert. Ma come avrebbe potuto avere la certezza che non esisteva un'altra macchina in grado di dare una risposta a quel problema? Fu qui che realizzò la sua terza impresa: l'idea di una *macchina universale*. Turing elaborò il progetto di un'unica macchina a cui sarebbe stato possibile fornire le istruzioni necessarie perché operasse come tutte le macchine di Turing o come qualsiasi altra macchina potenzialmente capace di rispondere al problema della decidibilità di Hilbert. Turing iniziava già a comprendere il potere di un programma in grado di istruire questa macchina universale a operare come ogni altra macchina capace di rispondere alla questione posta da Hilbert. Anche il cervello era una macchina che avrebbe forse potuto discriminare fra il dimostrabile e l'indimostrabile, e questo fatto stimolò le successive indagini di Turing sulla possibilità che una macchina fosse in grado di elaborare pensieri. Per il momento, egli si concentrò sulla verifica di ogni dettaglio della soluzione che stava proponendo al quesito posto da Hilbert.

Turing sgobbò per un anno per avere la certezza che la sua

argomentazione fosse inattaccabile. Sapeva che il giorno in cui l'avrebbe resa pubblica, sarebbe stata sottoposta alle verifiche più severe. Decise che la persona più adatta per metterla alla prova era colui che per primo gli aveva spiegato il problema: Newman. Da principio Newman si mostrò dubbioso. C'era il pericolo di finire per convincersi che qualcosa era vero quando non lo era. Ma quando Newman si mise a girare e rigirare l'argomentazione si convinse che forse Turing aveva fatto centro. Di lì a poco avrebbero scoperto che non era il solo ad aver fatto centro.

Turing venne a sapere che uno dei matematici di Princeton l'aveva battuto sul filo di lana. Alonzo Church aveva raggiunto le stesse conclusioni quasi contemporaneamente a Turing, ma era stato più rapido nel rendere pubblica la propria scoperta. Naturalmente Turing era preoccupato all'idea che il suo tentativo di ottenere un riconoscimento nella selvaggia giungla accademica fosse vanificato dall'annuncio di Church. Ma grazie al sostegno di Newman, suo mentore a Cambridge, anche la dimostrazione di Turing fu accettata per la pubblicazione. La scarsa attenzione che ricevette quando fu pubblicata gettò Turing nello sconforto. Tuttavia la sua idea di una macchina universale era molto più tangibile del metodo proposto da Church, e aveva conseguenze di portata molto maggiore. La mania di Turing per le invenzioni materiali aveva pervaso le sue considerazioni teoriche. Benché la sua macchina universale fosse solo una macchina della mente, la descrizione che ne aveva dato faceva pensare al progetto di un marchingegno reale. Un suo amico affermò

scherzando che se mai fosse stata costruita, avrebbe probabilmente riempito l'Albert Hall.

La macchina universale segnò l'inizio dell'era dell'informatica, che avrebbe dotato i matematici di un nuovo mezzo con cui esplorare l'universo dei numeri. Già nel corso della sua vita, Turing comprese l'impatto che delle reali macchine di calcolo avrebbero potuto avere sullo studio dei numeri primi. Quello che non poteva prevedere era il ruolo che la sua macchina teorica avrebbe avuto nel portare alla luce uno dei tesori più inaccessibili della matematica. L'analisi estremamente astratta che Turing fece del problema della decidibilità di Hilbert sarebbe diventata la chiave, decenni più tardi, della scoperta fortuita di un'equazione che genera tutti i numeri primi.

Rotelle e pulegge e olio

Il passo successivo di Turing fu un viaggio oltre Atlantico per incontrare Church. Sperava anche di avere l'occasione di conoscere Gödel, che si trovava in visita all'Institute for Advanced Study. Benché fossero le macchine teoriche a occupare la mente di Turing durante la traversata, egli non aveva perso la passione per gli strumenti reali. Trascorse la settimana di viaggio in nave registrando la rotta con l'aiuto di un sestante.

Quando giunse a Princeton, scoprì con disappunto che Gödel era ripartito per l'Austria. Avrebbe fatto ritorno a

Princeton due anni più tardi per assumere un incarico permanente all'istituto, dopo essere sfuggito dalla persecuzione in Europa. Una persona che Turing riuscì a incontrare a Princeton fu Hardy, anch'egli in visita all'istituto. Turing scrisse alla madre del suo incontro con Hardy: «All'inizio è stato molto sussiegoso o, più probabilmente, riservato. L'ho visto nell'alloggio di Maurice Pryce il giorno che sono arrivato, e non mi ha rivolto nemmeno una parola. Ma adesso sta diventando molto più amichevole».

Una volta che ebbe messo per iscritto la sua dimostrazione del problema della decidibilità di Hilbert perché fosse pubblicata, Turing si guardò attorno alla ricerca di un altro problema di peso da attaccare. Dopo aver risolto il problema della decidibilità, era arduo trovare un'impresa altrettanto eccezionale. Ma se si doveva scegliere un altro problema di grande peso, perché non puntare alla preda più ambita in assoluto, l'ipotesi di Riemann? Turing si fece mandare gli articoli più recenti sull'ipotesi da Albert Ingham, un suo collega di Cambridge. Cominciò anche a parlarne con Hardy per capire che cosa ne pensasse.

Nel 1937 Hardy stava diventando sempre più pessimista riguardo alla fondatezza dell'ipotesi di Riemann. Aveva speso così tanto tempo a tentare di dimostrarla senza successo che cominciava a convincersi che fosse falsa. Turing, influenzato dall'umore di Hardy, pensò che avrebbe potuto costruire una macchina con cui dimostrare che Riemann si era sbagliato. Aveva anche sentito parlare della riscoperta da parte di Siegel del fantastico metodo di Riemann per calco-

lare gli zeri della funzione zeta. Nella formula che Siegel aveva rinvenuto, si faceva un uso ingegnoso della somma di seni e coseni per stimare in modo efficiente le altitudini nel paesaggio di Riemann. A Cambridge, il metodo proposto da Turing per risolvere il problema della decidibilità di Hilbert creando una macchina era considerato un approccio assolutamente innovativo. Ma Turing comprese che sarebbe stato possibile usare delle macchine anche per far luce sulla formula segreta di Riemann. Egli si rendeva conto che c'erano forti analogie fra la formula di Riemann e quelle utilizzate per prevedere fenomeni fisici periodici quali i moti orbitali dei pianeti. Nel 1936 Ted Titchmarsh, un matematico di Oxford, aveva adattato una macchina, destinata in origine al calcolo dei moti celesti, per dimostrare che i primi 1.041 zeri del paesaggio zeta giacevano effettivamente sulla retta magica di Riemann. Ma Turing conosceva un macchinario ancor più sofisticato che veniva usato per prevedere un altro fenomeno periodico naturale: le maree.

Le maree ponevano un problema matematico complesso perché il loro studio dipendeva dal calcolo del ciclo giornaliero della rotazione terrestre, del ciclo mensile della rivoluzione lunare e del ciclo annuale dell'orbita della Terra attorno al Sole. A Liverpool Turing aveva visto una macchina che eseguiva quei calcoli in maniera automatica. La somma di tutte le onde sinusoidali era sostituita dall'azionamento di un sistema di ruote dentate e pulegge, e la risposta era fornita dalla lunghezza di alcune sezioni di una cordicella che fuoriusciva dal marchingegno. Turing scrisse a Titchmarsh,

confessandogli che quando aveva visto per la prima volta la macchina di Liverpool non aveva sospettato minimamente che la si potesse usare per studiare i numeri primi. Ora però la sua mente correva. Avrebbe costruito una macchina in grado di calcolare le altitudini nel paesaggio di Riemann. In questo modo forse sarebbe riuscito a individuare un punto a livello del mare che cadeva fuori della retta critica di Riemann e a dimostrare così che l'ipotesi di Riemann era falsa.

Turing non fu il primo a prendere in considerazione l'uso di una macchina per velocizzare dei calcoli tediosi. Charles Babbage, un altro matematico laureato a Cambridge, aveva concepito l'idea di costruire macchine calcolatrici già all'inizio del secolo precedente. Nel 1810 Babbage era uno studente del Trinity College, ed era affascinato dai congegni meccanici tanto quanto Turing. Nella sua autobiografia egli ricorda quale fu la genesi dell'idea di costruire una macchina per calcolare le tavole matematiche che erano fondamentali per dare all'Inghilterra le capacità di padroneggiare con tanta perizia la navigazione in mare:

> Una sera me ne stavo seduto nei locali della Analytical Society, a Cambridge, la testa china sul tavolo in una sorta di stato d'animo sognante, una tavola dei logaritmi aperta davanti a me. Un altro membro della società, entrando nella stanza e vedendomi mezzo addormentato, urlò: «Ebbene, Babbage, che cosa stai sognando?». Al che gli risposi, indicando i logaritmi: «Sto pensando a come si potrebbero calcolare tutte queste tavole usando una macchina meccanica».

Fu solo nel 1823 che Babbage poté cominciare a tradurre in realtà il sogno di costruire la sua «Macchina alle differenze». Ma il progetto naufragò nel 1833, quando ci fu un litigio fra Babbage e il responsabile dei lavori per questioni di soldi. Alla fine una parte della macchina fu completata, ma si dovette aspettare fino al 1991, il bicentenario della nascita di Babbage, perché la sua visione si concretizzasse per intero. Ciò avvenne quando, al costo di 300.000 sterline, fu costruita una macchina alle differenze nel Museo della scienza di Londra, dove è tuttora esposta.

L'idea di Turing di una «macchina zeta» era simile al progetto di Babbage per il calcolo dei logaritmi con la sua macchina alle differenze. Il meccanismo si adattava specificamente al singolo problema di calcolo da risolvere. Non era certo una delle macchine universali teoriche concepite da Turing, con cui sarebbe stato possibile simulare ogni tipo di calcolo. Le proprietà fisiche del congegno ricalcavano quelle concettuali del problema a cui era dedicato, e ciò lo rendeva inservibile per la risoluzione di altre questioni. Turing lo ammise esplicitamente in una domanda presentata alla Royal Society per ottenere i finanziamenti necessari a metter mano alla costruzione di una macchina zeta: «L'apparato manterrebbe uno scarso valore nel tempo [...] Non riesco a pensare a una sola applicazione che non sia connessa alla funzione zeta».

Lo stesso Babbage si era reso conto degli svantaggi di costruire una macchina che avrebbe potuto calcolare soltanto i logaritmi. Negli anni Trenta dell'Ottocento sognava una macchina ancora più ambiziosa, in grado di eseguire una va-

rietà di compiti. A ispirarlo erano stati i telai meccanici inventati dal francese Jacquard, usati negli opifici di tutta Europa. Gli operai specializzati erano stati sostituiti da schede perforate che, quando venivano inserite nel telaio, ne controllavano il funzionamento. (Qualcuno si è spinto a definire quelle schede il primo software per computer.) Babbage fu così impressionato dall'invenzione di Jacquard che acquistò un ritratto dell'inventore francese in seta intessuta con l'aiuto di una di quelle schede perforate. «Il telaio è in grado di tessere ogni motivo che l'immaginazione umana possa concepire» affermò ammirato. Se quella macchina poteva produrre qualsiasi figura, perché lui non avrebbe potuto costruire una macchina in cui inserire una scheda che la istruisse a eseguire un qualsiasi calcolo matematico? Il progetto di una «Macchina analitica», come Babbage la battezzò, precorreva quello della macchina universale concepita da Turing.

Fu la figlia del poeta Lord Byron, Ada Lovelace, a comprendere l'incredibile potenziale che la programmabilità conferiva alla macchina di Babbage. Mentre traduceva in francese una copia del saggio in cui Babbage aveva descritto la sua macchina analitica, Ada non resistette alla tentazione di aggiungere alcune note personali per decantarne le virtù. «Possiamo affermare in maniera del tutto appropriata che la Macchina analitica tesse motivi algebrici, proprio come il telaio Jacquard tesse fiori e foglie.» Le sue annotazioni comprendevano molti programmi che la nuova macchina di Babbage, benché fosse puramente teorica e non fosse mai stata costruita, avrebbe potuto eseguire. Una volta terminata

la traduzione, le sue aggiunte erano diventate così copiose che la versione francese del saggio risultò tre volte più lunga dell'originale inglese. Oggi Ada Lovelace è considerata unanimemente la prima programmatrice di computer al mondo. Colpita da un cancro, morì fra atroci sofferenze nel 1852, a soli trentasei anni.

Mentre in Inghilterra Babbage lavorava intensamente sui propri progetti di macchine calcolatrici, in Germania Riemann stava elaborando i suoi concetti matematici astratti. Ottant'anni più tardi, Turing coltivava la speranza di riuscire a unificare quei due temi. Si era già fatto le ossa studiando la computabilità teorica del teorema d'incompletezza di Gödel, che era stato alla base della sua tesi di laurea. Adesso doveva passare al lavoro ben più concreto di costruire fisicamente le ruote dentate della sua macchina zeta. Grazie al sostegno di Hardy e di Titchmarsh, la Royal Society accolse la sua richiesta di un finanziamento di quaranta sterline come contributo per la fabbricazione dell'invenzione.

Nell'estate del 1939 la stanza di Turing era piena di «ingranaggi sparsi sul pavimento come le tessere di una specie di puzzle» scrive il suo biografo Andrew Hodges. Ma il sogno di Turing di una macchina zeta che avrebbe unito la passione inglese del XIX secolo per le macchine con quella tedesca per la teoria era destinato a interrompersi bruscamente. Con lo scoppio della Seconda guerra mondiale quella fiorente unità intellettuale fra i due Paesi fu sostituita da un conflitto armato. Le forze intellettuali britanniche furono radunate a Bletchley Park e le menti passarono dalla ri-

cerca degli zeri alla decifrazione di codici segreti. Il successo di Turing nella progettazione delle macchine per decrittare Enigma deve qualcosa al suo apprendistato nel calcolo degli zeri della funzione zeta di Riemann. La sua complessa rete di ruote dentate sovrapposte non aveva svelato i segreti dei numeri primi, ma i nuovi marchingegni ideati da Turing si sarebbero dimostrati incredibilmente efficaci per scoprire i movimenti segreti della macchina militare tedesca.

Bletchley Park era uno strano mix fra la tradizionale torre d'avorio dell'ambiente accademico e il mondo reale. Assomigliava a un college di Cambridge, con le partite di cricket giocate nel prato davanti all'edificio. Per Turing e gli altri matematici, i messaggi cifrati che arrivavano ogni giorno prendevano il posto dei cruciverba del «Times» da risolvere nelle sale di ritrovo dei college: un rompicapo teorico. Eppure tutti loro sapevano che dalla soluzione di quei rebus dipendevano delle vite umane. Data l'atmosfera di Bletchley Park, non sorprende che Turing continuasse a pensare alla matematica mentre dava il suo contributo alla vittoria degli Alleati.

Proprio mentre lavorava a Bletchley, Turing giunse a comprendere, come già Babbage un centinaio d'anni prima di lui, che costruire un'unica macchina a cui si potessero fornire le istruzioni necessarie per eseguire compiti diversi era meglio che costruirne appositamente una nuova per ogni nuovo problema da risolvere. Pur conoscendo questo fatto in teoria, doveva ancora imparare sulla propria pelle quanto fosse difficile e importante metterlo in pratica. Quando i te-

deschi cambiarono i modelli delle macchine Enigma che utilizzavano sul campo, Bletchley Park sprofondò nel silenzio per settimane. Turing comprese allora che i decrittatori avevano bisogno di una macchina che potesse essere adattata in modo tale da adeguarsi a ogni modifica che i tedeschi decidessero di introdurre nelle loro macchine.

Dopo la fine della guerra, Turing cominciò a esaminare la possibilità di costruire una macchina calcolatrice universale che potesse essere programmata per eseguire una gran varietà di compiti. Dopo aver trascorso parecchi anni presso il Laboratorio nazionale di fisica britannico, andò a lavorare con Max Newman a Manchester, nell'appena costituito Laboratorio di calcolo della Royal Society. Newman era stato al fianco di Turing a Cambridge, durante lo sviluppo della macchina teorica che aveva fatto a pezzi la speranza di Hilbert di escogitare un algoritmo in grado di decidere se un enunciato vero fosse dimostrabile. Adesso Newman e Turing avrebbero lavorato insieme alla progettazione e alla costruzione di una macchina reale.

A Manchester, Turing ebbe modo di mettere a frutto le capacità tecniche che aveva maturato decifrando codici a Bletchley, anche se le attività che aveva svolto durante il periodo bellico sarebbero rimaste coperte dal segreto di Stato per decenni. Ritornò sull'idea che l'aveva ossessionato nei giorni precedenti alla guerra: usare delle macchine per esplorare il paesaggio di Riemann alla ricerca di controesempi all'ipotesi di Riemann, ovvero di zeri che cadessero fuori della retta critica. Ma questa volta, invece di costruire una mac-

china le cui caratteristiche fisiche rispecchiassero gli aspetti del problema che cercava di risolvere, Turing cercò di creare un programma che potesse essere eseguito sul calcolatore universale che lui e Newman stavano costruendo assemblando tubi a raggi catodici e tamburi magnetici.

Naturalmente, il funzionamento di una macchina teorica procede spedito e senza intoppi. Le macchine reali, come Turing aveva scoperto a Bletchley Park, sono molto più bizzose. Ma nel 1950 il suo nuovo marchingegno era terminato, funzionante e pronto per iniziare l'esplorazione del paesaggio zeta. Il record del numero di zeri individuati sulla retta di Riemann risaliva a prima della guerra ed era detenuto dall'ex studente di Hardy Ted Titchmarsh. Titchmarsh aveva confermato che i primi 1.041 punti a livello del mare soddisfacevano l'ipotesi di Riemann. Turing batté quel record: riuscì a fare in modo che la sua macchina verificasse la posizione dei primi 1.104 zeri e poi, come scrisse, «sfortunatamente a questo punto la macchina si guastò». Ma non erano solo le sue macchine che si stavano guastando.

La vita privata di Turing cominciava a crollargli attorno. Nel 1952 fu arrestato quando la polizia lo mise sotto inchiesta per omosessualità. La sua casa era stata svaligiata ed era stato lui stesso a chiamare la polizia: si scoprì che lo scassinatore conosceva uno degli amanti di Turing. La polizia diede la caccia al ladro, ma prese di mira anche l'«atto di grave oscenità» (come lo descriveva la legge a quel tempo) che la vittima del furto aveva ammesso di aver compiuto. Turing ne fu sconvolto. Quella vicenda poteva significare la prigio-

ne. Newman testimoniò in sua difesa, dichiarando che Turing era «completamente dedito al suo lavoro ed è una delle menti matematiche più profonde e originali della sua generazione». Gli fu risparmiata una condanna alla detenzione a patto che si sottoponesse volontariamente a un trattamento farmacologico per tenere sotto controllo il proprio comportamento sessuale. Scrisse a uno dei suoi vecchi professori di Cambridge: «Dicono che riduce il desiderio sessuale finché lo si segue, ma che poi si torna normali quando è terminato. Spero che abbiano ragione».

L'8 giugno 1954 Turing fu trovato morto nella sua stanza, avvelenato col cianuro. Sua madre non riuscì ad accettare l'idea che potesse aver commesso un suicidio. Alan aveva fatto esperimenti con sostanze chimiche fin da quando era un ragazzino, e non si lavava mai le mani. Si era trattato di un incidente, insisteva la madre. Ma accanto al letto di Turing c'era una mela morsicata in più punti. Anche se quella mela non fu mai analizzata, ci sono pochi dubbi sul fatto che fosse zuppa di cianuro. Una delle scene cinematografiche preferite da Turing era quella in cui, nella versione disneyana di *Biancaneve e i sette nani*, la strega cattiva crea la mela che farà cadere addormentata Biancaneve: «Metti il frutto nel veleno fino a quando ne sia pieno».

Quarantasei anni dopo la sua morte, all'alba del XXI secolo, nella comunità matematica cominciò a diffondersi la voce che le macchine di Turing avevano individuato effettivamente un controesempio all'ipotesi di Riemann. Ma poiché la scoperta era stata fatta a Bletchley Park durante la Se-

conda guerra mondiale con le stesse macchine che avevano decifrato il codice Enigma, i servizi segreti inglesi si opponevano a che fosse resa pubblica. Alla fine la voce si rivelò per quello che era, nulla più di una voce appunto, e si scoprì che a metterla in giro era stato uno degli amici di Bombieri che condivideva con lui il gusto italiano per i pesci d'aprile birbanteschi.

Benché si fosse rotta subito dopo aver battuto il record di zeri stabilito prima della guerra, la macchina di Turing aveva compiuto il primo passo dentro un'era in cui il computer avrebbe preso il posto della mente umana nell'esplorazione del paesaggio di Riemann. Ci sarebbe voluto un po' di tempo prima di riuscire a sviluppare i «veicoli telecomandati» adatti a esplorarlo in modo efficiente, ma presto quei veicoli senza equipaggio si sarebbero spinti sempre più a nord lungo la retta magica di Riemann, inviandoci un numero crescente di prove – se non una dimostrazione definitiva – del fatto che a differenza di quanto Turing credeva, Riemann aveva visto giusto.

Ma anche se le macchine reali di Turing dovevano ancora avere effetti concreti sull'ipotesi di Riemann, le sue idee astratte erano destinate a contribuire a una svolta inaspettata nella storia dei numeri primi: la scoperta di un'equazione in grado di generarli tutti. Turing non avrebbe mai potuto immaginare che quest'equazione sarebbe emersa dalle macerie in cui lui stesso e Gödel avevano ridotto il programma con il quale Hilbert intendeva dotare la matematica di fondamenta solide.

Dal caos dell'indeterminazione a un'equazione per i numeri primi

Turing aveva dimostrato che la sua macchina universale non poteva rispondere a tutti i quesiti della matematica. Ma se si fossero considerati traguardi meno ambiziosi? La macchina universale di Turing avrebbe potuto dire qualcosa sull'esistenza di soluzioni a un'equazione? Questo era il succo del decimo problema di Hilbert, che nel 1848 stava cominciando a ossessionare Julia Robinson, una valente matematica che lavorava a Berkeley.

Con pochissime importanti eccezioni, fino a qualche decennio fa molto raramente le donne hanno fatto la loro apparizione nella storia della matematica. La matematica francese Sophie Germain intrattenne una corrispondenza con Gauss, ma fingeva di essere un uomo, temendo che se non l'avesse fatto le sue idee sarebbero state immediatamente scartate. Aveva scoperto un tipo particolare di numeri primi legati all'ultimo teorema di Fermat, che oggi sono chiamati numeri primi di Germain. Gauss rimase molto impressionato dalle lettere che riceveva da «Monsieur le Blanc» e si meravigliò quando scoprì dopo una lunga corrispondenza che quel monsieur era in realtà una mademoiselle. Le scrisse:

> Il gusto per i misteri dei numeri è raro [...] Il fascino di questa scienza sublime si rivela in tutta la sua bellezza solo a coloro i quali hanno il coraggio di sondarlo. Ma quando una donna che a causa del suo sesso è vittima dei nostri costumi e

> pregiudizi [...] supera questi impedimenti e penetra in ciò che è più profondo, non c'è dubbio che sia dotata di un nobilissimo coraggio, di un talento straordinario e di un genio superiore.

Gauss cercò di convincere l'università di Gottinga ad assegnarle una laurea honoris causa, ma Germain morì prima che ci riuscisse.

Nella Gottinga di Hilbert, Emmy Noether fu un'algebrista di talento eccezionale. Hilbert si batté in suo nome per far revocare le norme arcaiche che negavano alle donne la possibilità di ottenere incarichi nelle istituzioni accademiche tedesche. «Non penso che il sesso del candidato sia un argomento valido contro la sua nomina» obbiettò. L'università, dichiarò, non era «un bagno pubblico». Alla fine Noether, che era ebrea, dovette abbandonare Gottinga per gli Stati Uniti. Alcune particolari strutture algebriche che permeano la matematica hanno preso il suo nome.

Julia Robinson fu sempre considerata qualcosa più di una matematica molto dotata. Era anche una donna degli anni Sessanta, e il suo successo incoraggiò altre donne a seguire una carriera nella matematica. In seguito ricordò come, essendo una delle poche accademiche donne, le venisse sempre chiesto di completare le raccolte di dati statistici. «Compaio nei campioni scientificamente selezionati di tutti.»

Julia aveva trascorso l'infanzia nel deserto dell'Arizona. Era una vita solitaria, con una sorella e la terra come unica compagnia. Già da piccola le piaceva individuare forme re-

golari nel deserto: «In uno dei primissimi ricordi che ho» ha raccontato «sono impegnata a disporre in bell'ordine dei ciottoli all'ombra di un saguaro gigante, con gli occhi socchiusi per la luce accecante del sole. Penso di aver sempre avuto una fondamentale predilezione per i numeri naturali. Per me, sono la sola cosa reale». A nove anni Julia si ammalò di febbre reumatica e fu costretta a letto per un paio d'anni.

Julia Robinson (1919-1985).

Un isolamento di questo genere può essere fonte d'ispirazione per giovani scienziati in erba. Cauchy e Riemann cercarono un rifugio nel mondo matematico dai problemi fisici ed emotivi del loro mondo reale. Anche se Robinson non

trascorse le ore in cui rimase confinata a letto a inventare teoremi, acquisì però le abilità che la misero nelle condizioni migliori per affrontare le battaglie matematiche che l'attendevano. «Tendo a pensare che quello che ho appreso durante gli anni in cui fui costretta a letto è stata la pazienza. Mia madre diceva che ero la bambina più testarda che avesse mai conosciuto. Io direi che la mia testardaggine è stata all'origine di qualunque successo matematico abbia raggiunto.»

Quando si fu ripresa dalla malattia, Robinson aveva ormai perduto due anni di scuola. Dopo un anno di lezioni private, tuttavia, scoprì di essere molto più avanti dei suoi compagni. Una volta il suo insegnante le spiegò che già da duemila anni gli antichi greci sapevano che la radice quadrata di 2 non si poteva scrivere come una frazione esatta. A differenza dell'espansione decimale di una frazione, quella della radice quadrata di 2 non si ripeteva periodicamente. A Robinson sembrava straordinario che si potesse dimostrare una cosa del genere. Com'era possibile avere la certezza che dopo milioni di cifre decimali non sarebbe emerso un andamento regolare? «Andai a casa e utilizzai le nozioni che avevo appena appreso sull'estrazione delle radici quadrate per verificare la cosa, ma alla fine, nel tardo pomeriggio, ci rinunciai.» A dispetto di quel fallimento, cominciò ad apprezzare il potere del ragionamento matematico per mostrare in modo convincente che, per quanto a lungo ci si spingesse nel calcolo dell'espansione decimale della radice quadrata di 2, non sarebbe mai emerso un andamento regolare.

È il potere di queste semplici argomentazioni ad affasci-

nare molti di coloro che si dedicano alla matematica. Nel caso della radice quadrata di 2, per esempio, abbiamo un problema che la forza bruta dei calcoli non potrà mai risolvere, nemmeno con l'aiuto del computer più potente, eppure basta mettere in fila poche semplici idee matematiche scelte con intelligenza per svelare il mistero di questa espansione decimale infinita. Il compito impossibile di controllare un numero infinito di cifre decimali si riduce a un piccolo ragionamento ingegnoso.

A quattordici anni, Julia Robinson si mise alla ricerca di un qualsiasi argomento matematico che potesse alleviare la noia dell'arida aritmetica scolastica. Ascoltava con grande entusiasmo un programma radiofonico intitolato *University Explorer*. La incuriosì in particolare una puntata dedicata alla storia del matematico D.N. Lehmer e di suo figlio D.H. Lehmer. Nella trasmissione si spiegava come questo team matematico tentasse di attaccare alcuni problemi con macchine di calcolo realizzate con pignoni e catene di bicicletta. Il più giovane dei Lehmer sarebbe stato il primo ad afferrare il testimone dalla mani di Turing e a usare moderne macchine di calcolo per mostrare, nel 1956, che i primi 25.000 zeri della funzione zeta soddisfano l'ipotesi di Riemann. Lehmer padre descrisse come la loro macchina prebellica «funzionava tranquilla e beata per pochi minuti e poi diventava d'improvviso incoerente. Si riprendeva di colpo ma poco dopo si metteva di nuovo a fare le bizze». Alla fine i due Lehmer riuscirono a individuare l'origine di quei balbettii: un vicino che ascoltava la radio. Il problema matematico preferito dai

Lehmer era la ricerca dei numeri primi di cui erano composti i grandi numeri. Robinson fu così impressionata dalla descrizione di quelle macchine che scrisse alla radio per richiedere una trascrizione della trasmissione.

In un giornale trovò un trafiletto sulla presunta scoperta del più grande numero primo mai individuato e lo ritagliò entusiasta. Sotto il titolo «Trova il numero più grande ma nessuno se ne cura», c'era scritto:

> Il dottor Samuel I. Krieger ha consumato sei matite, ha usato 72 fogli di formato legale e si è logorato non poco i nervi, ma oggi ha potuto annunciare che 231.584.178.474.632. 390.847.141.970.017.375.815.706.539.969.331.281.128. 078.915.826.259.279.871 è il più grande numero primo che si conosca. Non ha saputo dire sui due piedi a chi importasse.

Forse la mancanza di interesse riflette il fatto che quel numero in realtà è divisibile per 47 (come il giornale avrebbe potuto scoprire se avesse controllato). Robinson conservò quel ritaglio per tutta la vita, insieme al copione del programma radiofonico sulla macchina da calcolo dei Lehmer e a un opuscolo che aveva comprato sui misteri della quarta dimensione.

Le basi della carriera matematica di Julia Robinson erano state gettate. Si laureò al San Diego State College, poi andò all'università della California, a Berkeley, dove la sua passione per la teoria dei numeri fu ridestata da Raphael

Robinson, un giovane docente che sarebbe diventato suo marito. Quando ancora uscivano insieme, Raphael scoprì che la matematica era la strada per raggiungere il cuore di Julia. Cominciò a bombardarla di spiegazioni sulle più recenti conquiste nel campo.

La descrizione di Raphael dei risultati ottenuti da Gödel e Turing la affascinò particolarmente. «Il fatto che fosse possibile dimostrare delle verità sui numeri per mezzo della logica simbolica mi impressionò e mi entusiasmò molto» disse. Nonostante la natura inquietante dei risultati di Gödel, Julia conservò il senso della realtà dei numeri che aveva acquistato da bambina, giocando con i ciottoli nel deserto. «Possiamo concepire una chimica che è diversa dalla nostra, ma non possiamo concepire una diversa matematica dei numeri. Ciò che si dimostra sui numeri rimane un fatto assodato in qualsiasi universo.»

Benché fosse dotata di una grande abilità matematica, Robinson riconosceva che senza il sostegno di suo marito per lei sarebbe stato difficile continuare a praticare l'amata disciplina professionalmente in un'epoca in cui per moltissime donne sostenere una carriera accademica non era affatto facile. A Berkeley le regole dell'università impedivano a marito e moglie di far parte dello stesso dipartimento. A riconoscimento delle sue capacità di ricercatrice, venne creato appositamente per lei un incarico nel campo della statistica. La descrizione della propria attività che presentò all'ufficio del personale insieme alla domanda di assunzione è un classico resoconto della settimana lavorativa di gran parte dei mate-

matici: «Lunedì, tentato di dimostrare un teorema. Martedì, tentato di dimostrare un teorema. Mercoledì, tentato di dimostrare un teorema. Giovedì, tentato di dimostrare un teorema. Venerdì, teorema falso».

Il suo interesse per l'opera di Gödel e Turing fu alimentato dall'opportunità di studiare con uno dei grandi logici del XX secolo, Alfred Tarski, un polacco sorpreso dallo scoppio della guerra mentre si trovava in visita a Harvard, nel 1939. Julia Robinson, tuttavia, non intendeva abbandonare la propria passione per i numeri primi. Il decimo problema di Hilbert offriva una miscela perfetta delle due discipline: esiste un algoritmo – un programma, in termini informatici – che possa essere usato per stabilire se un'equazione qualsiasi ammette soluzioni?

Alla luce dell'opera compiuta da Gödel e Turing, stava diventando chiaro che, contrariamente all'opinione iniziale di Hilbert, con ogni probabilità un tale programma non esisteva. Julia Robinson era sicura che dovesse esserci un modo per far fruttare le basi gettate da Turing. Sapeva che ciascuna macchina di Turing dà origine a una sequenza di numeri. Una macchina di Turing, per esempio, poteva produrre un elenco dei quadrati di tutti i numeri interi (1, 4, 9, 16, ...) mentre un'altra poteva generare i numeri primi. Uno dei passaggi della soluzione di Turing al problema della decidibilità di Hilbert era consistito nel dimostrare che, dati una macchina di Turing e un numero, non esisteva un programma in grado di stabilire se quella macchina avrebbe prodotto quel numero. Robinson cercava un nesso fra equazioni e

macchine di Turing. A ogni macchina di Turing, pensava, doveva corrispondere una particolare equazione.

La sua speranza era che, nel caso in cui quel nesso esistesse, il chiedersi se una particolare macchina di Turing producesse un numero si traducesse nel chiedersi se l'equazione associata a quella macchina avesse una soluzione. Una volta che fosse riuscita a stabilire quel nesso, sarebbe stata a cavallo. Se fosse esistito un programma in grado di verificare la risolvibilità delle equazioni, così come Hilbert aveva sperato quando aveva posto il suo decimo problema, allora, grazie all'ancora ipotetico nesso fra equazioni e macchine di Turing, sarebbe stato possibile usare quel programma per verificare quali numeri fossero prodotti dalle macchine di Turing. Ma Turing aveva dimostrato che un siffatto programma – un programma in grado di determinare i numeri prodotti dalle macchine di Turing – non esisteva. Di conseguenza, non sarebbe potuto esistere alcun programma in grado di stabilire se le equazioni avessero soluzioni. La risposta al decimo problema di Hilbert sarebbe stata «no».

Robinson si accinse a tentare di stabilire in che modo ciascuna macchina di Turing poteva essere associata a una particolare equazione. Ciò che voleva ottenere era un'equazione le cui soluzioni fossero legate alla sequenza dei numeri prodotti dalla corrispondente macchina di Turing. Trovava piuttosto divertente la questione che si era posta. «Di solito in matematica hai un'equazione e vuoi trovare una soluzione. Qui ti era data una soluzione e dovevi trovare l'equazione. Mi piaceva.» Col passare degli anni l'interesse che era sta-

to acceso nel 1948 si trasformò in un'ossessione. Dopo la malattia subita a nove anni, i dottori avevano previsto che il suo cuore si fosse indebolito al punto da rendere improbabile che superasse i quarant'anni di vita. A ogni compleanno, «quando arrivava il momento per me di soffiare sulle candeline della torta, esprimevo sempre lo stesso desiderio, anno dopo anno: che il decimo problema di Hilbert sarebbe stato risolto. Non che fossi io a risolverlo, ma solo che sarebbe stato risolto. Sentivo che non avrei potuto sopportare di morire senza conoscere la risposta».

A ogni anno che passava, Julia faceva nuovi progressi. Si unirono alla sua ricerca due altri matematici, Martin Davis e Hilary Putnam. Alla fine degli anni Sessanta avevano ridotto il problema a qualcosa di più semplice. Invece di dover trovare tutte le equazioni per tutte le risposte date dalle macchine di Turing, scoprirono che se fossero riusciti a trovare un'equazione per una particolare sequenza di numeri, avrebbero dimostrato la fondatezza dell'ipotesi di Robinson. Era un risultato importante. Tutto si riduceva a trovare l'equazione per quell'unica sequenza di numeri. Adesso l'intera teoria dipendeva dalla capacità dei tre matematici di confermare l'esistenza di un unico mattone nel loro muro matematico. Se avessero scoperto che a quella sequenza non corrispondeva una specifica equazione di Robinson, allora il muro alla cui costruzione avevano dedicato tanto tempo sarebbe crollato in un sol colpo.

L'idea che l'approccio di Julia Robinson fosse il modo giusto di attaccare il decimo problema di Hilbert era oggetto

di uno scetticismo crescente. Un buon numero di matematici riteneva che fosse un tentativo malaccorto. Poi, inaspettatamente, il 15 febbraio del 1970, Robinson ricevette la telefonata di un collega che aveva appena fatto ritorno da un convegno in Siberia. Lì aveva ascoltato una comunicazione molto importante, e pensava che lei l'avrebbe trovata interessante. Un matematico russo ventiduenne, Jurij Matijasievič, aveva scovato l'ultima tessera del puzzle e risolto il decimo problema di Hilbert. Aveva dimostrato che esisteva un'equazione che avrebbe prodotto la sequenza numerica, proprio come Robinson aveva predetto. Era il mattone su cui poggiava l'intero approccio di Julia Robinson. La soluzione del decimo problema di Hilbert era completa: un programma che permettesse di stabilire se un'equazione ha soluzioni non esisteva.

«Quell'anno, quando arrivò il momento di spegnere le candeline della mia torta, mi bloccai a metà respiro, rendendomi conto all'improvviso che il desiderio che avevo espresso per tanti anni si era davvero realizzato.» Robinson comprese che per tutto quel tempo aveva avuto la soluzione sotto il naso, ma c'era voluto Matijasievič per individuarla. «Ci sono un sacco di cose che giacciono sulla spiaggia e che non vediamo finché qualcuno non ne raccoglie una. Allora, quella, la vediamo tutti» spiegò. Scrisse a Matijasievič per congratularsi con lui: «Mi fa particolarmente piacere pensare che quando formulai la congettura per la prima volta lei era un bambino piccolo e che io dovevo semplicemente aspettare che lei crescesse».

È incredibile come la matematica abbia la capacità di unire gli individui superando le frontiere politiche e storiche. A dispetto delle difficoltà poste dalla Guerra Fredda, questi matematici americani e russi avrebbero costruito una forte amicizia basata sulla comune ossessione per il problema di Hilbert che li aveva ispirati. Julia Robinson descrisse questo strano legame fra matematici come «una nazione a sé, senza distinzioni di origine geografica, di razza, di credo, di sesso, d'età e neppure di tempo (anche i matematici del passato e del futuro sono nostri colleghi), in cui tutti si dedicano alla più bella fra le arti e le scienze».

L'attribuzione del merito per la dimostrazione avrebbe provocato una contesa fra Matijasievič e Robinson, ma non perché i due puntassero a un innalzamento personale; al contrario, ciascuno di loro sosteneva che la parte più dura dell'impresa fosse stata compiuta dall'altro. È vero che, poiché fu Matijasievič a disporre l'ultima tessera del puzzle, spesso è a lui che viene attribuita la soluzione del decimo problema di Hilbert. Ma la realtà naturalmente è che molti matematici diedero i loro contributi al lungo viaggio che portò dall'annuncio fatto da Hilbert nel 1900 alla soluzione finale raggiunta settant'anni dopo.

Benché il problema fosse stato risolto in negativo – dimostrando cioè che non esistevano programmi che potessero essere usati per stabilire se una qualsiasi equazione avesse soluzioni – c'era un motivo d'ottimismo. Robinson aveva avuto ragione nel pensare che le sequenze di numeri prodotte dalle macchine di Turing potessero essere descritte per mez-

zo di equazioni. I matematici sapevano che esisteva una macchina di Turing in grado di riprodurre l'elenco completo dei numeri primi. Perciò, grazie al lavoro di Robinson e Matijasievič, in teoria avrebbe dovuto esserci una formula in grado di fornire tutti i numeri primi.

Ma i matematici sarebbero stati in grado di trovare una tale formula? Nel 1971 Matijasievič elaborò un metodo esplicito per arrivare a una formula, ma non lo seguì fino in fondo e non ottenne un risultato definito. La prima formula a essere scritta per esteso e nei dettagli fu scoperta nel 1976. Conteneva ventisei variabili, indicate con tutte e ventisei le lettere dell'alfabeto anglosassone:

$$(K+2)\{1-[WZ+H+J-Q]^2-[(GK+2G+K+1)(H+J)+H-Z]^2-[2N+P+Q+Z-E]^2-[16(K+1)^3(K+2)(N+1)^2+1-F^2]^2-[E^3(E+2)(A+1)^2+1-O^2]^2-[(A^2-1)Y^2+1-X^2]^2-[16R^2Y^4(A^2-1)+1-U^2]^2-[((A+U^2(U^2-A))^2-1)\times(N+4DY)^2+1-(X+CU)^2]^2-[N+L+V-Y]^2-[(A^2-1)L^2+1-M^2]^2-[AI+K+1-L-I]^2-[P+L(A-N-1)+B(2AN+2A-N^2-2N-2)-M]^2-[Q+Y(A-P-1)+S(2AP+2A-P^2-2P-2)-X]^2-[Z+PL(A-P)+T(2AP-P^2-1)-PM]^2\}$$

La formula funziona come un programma di computer. Si inseriscono a caso dei numeri interi al posto delle lettere A, ..., Z e poi si usa la formula per eseguire un calcolo su questi numeri; per esempio, potreste scegliere $A = 1$, $B = 2$, ..., $Z = 26$.

Se la risposta è maggiore di zero, allora il risultato del calcolo è un numero primo. Il processo può essere reiterato all'infinito, assegnando nuovi valori numerici alle lettere e rifacendo il calcolo. Passando sistematicamente in rassegna ogni possibile scelta di numeri per tutte e ventisei le lettere, avrete la garanzia di ottenere tutti i numeri primi. La formula non si lascia sfuggire nemmeno un numero primo: esiste sempre una scelta di valori numerici di A, ..., Z tale per cui l'equazione produrrà il numero primo in questione. C'è una sola clausola fastidiosa: alcune scelte di valori per le ventisei variabili producono un risultato negativo, e bisogna ignorarle. La nostra scelta di porre $A = 1$, $B = 2$, ..., $Z = 26$, per esempio, è una delle scelte che dobbiamo scartare.

Era questo il Santo Graal che poneva termine alla ricerca, la scoperta di un incredibile polinomio in grado di generare tutti i numeri primi? Se l'equazione fosse stata trovata ai tempi di Eulero, avrebbe avuto certamente una risonanza sensazionale. Eulero aveva scoperto un'equazione in grado di produrre tantissimi numeri primi, ma era stato molto pessimista riguardo alla possibilità di trovare un'equazione che producesse *tutti* i numeri primi. Tuttavia, dai tempi di Eulero la matematica si era allontanata dal mero studio di equazioni e formule per abbracciare la fede di Riemann nell'importanza delle strutture e dei temi fondamentali che attraversano il mondo matematico. Adesso gli esploratori matematici erano impegnati a ricostruire le mappe dei passaggi che conducevano a nuovi mondi. La scoperta di questa equazione per ottenere i numeri primi era un successo nato

in un'epoca sbagliata. Per la nuova generazione di matematici, era analogo a un rilevamento topografico molto tecnico di una terra esplorata anni prima e ormai abbandonata. Certo i matematici furono assai sorpresi del fatto che una tale equazione esistesse, ma Riemann aveva portato lo studio dei numeri primi su un piano diverso. Una sinfonia classica nello stile di Mozart scritta ed eseguita al tempo di Šostakovič non avrebbe fatto colpo sugli ascoltatori, anche se aveva raggiunto una certa perfezione stilistica.

Ma non fu solo il nuovo senso estetico della matematica a mutare l'accoglienza riservata a quell'equazione miracolosa. La verità è che essa era sostanzialmente inutile. I valori forniti dall'equazione sono in gran parte negativi. Anche dal punto di vista teorico l'equazione ha, in una certa misura, un'importanza relativa. Julia Robinson e Jurij Matijasievič avevano dimostrato che a ogni sequenza di numeri che può essere prodotta da una macchina di Turing è associata un'equazione del tipo di quella che produce i numeri primi. Dunque in questo senso non c'è nulla di speciale nei numeri primi rispetto a una qualsiasi altra sequenza di numeri. Quando qualcuno riferì al matematico russo Jurij V. Linnik il risultato ottenuto da Matijasievič sui numeri primi, egli commentò: «È meraviglioso. Con ogni probabilità presto apprenderemo un sacco di cose nuove sui primi». Ma quando gli fu spiegato come era stato dimostrato quel risultato e che lo stesso metodo si applicava a molte sequenze di numeri interi, Linnik si rimangiò l'entusiasmo iniziale: «È un peccato. Con ogni probabilità non apprenderemo nulla di nuovo sui primi».

Se l'esistenza di un'equazione di questo tipo è universalmente vera per ogni sequenza di numeri, allora essa non ci dice niente di specifico sui numeri primi. È questo che rende l'interpretazione data da Riemann ben più interessante. L'esistenza del paesaggio di Riemann e le note che egli creò utilizzando i punti a livello del mare formano una musica che appartiene esclusivamente ai numeri primi. Questa struttura armonica non si trova alla base di nessuna altra sequenza di numeri.

Mentre Julia Robinson mandava definitivamente in pensione il decimo dei problemi di Hilbert, a Stanford un suo amico stava mettendo fine alla fede di Hilbert nel fatto che in matematica nulla è inconoscibile. Nel 1962, quand'era ancora uno studente, Paul Cohen aveva chiesto con una certa arroganza ai suoi professori della Stanford quale dei problemi di Hilbert l'avrebbe reso famoso se fosse riuscito a risolverlo. I suoi professori ci pensarono un po' e poi gli dissero che il primo problema era uno dei più importanti. Per dirla in modo un po' rozzo, quel problema chiedeva quanti sono i numeri. A capo del suo elenco Hilbert aveva posto il quesito di Cantor sui diversi infiniti. Esiste un insieme infinito di numeri che abbia dimensioni maggiori dell'insieme di tutti i numeri frazionari, ma che nel contempo non sia grande quanto l'insieme di tutti i numeri reali, compresi i numeri irrazionali come π, $\sqrt{2}$ e ogni altro numero con espansione decimale infinita e non periodica?

È probabile che Hilbert si sia rivoltato nella tomba quando Cohen tornò un anno dopo con la soluzione: entrambe le

risposte erano possibili! Cohen dimostrò che questa domanda assolutamente basilare rientrava fra gli enunciati indimostrabili di Gödel. Svaniva, dunque, ogni speranza che soltanto i problemi astrusi fossero indecidibili. Ciò che Cohen aveva dimostrato era quanto segue: è impossibile dimostrare, in base agli assiomi che attualmente usiamo in matematica, che esiste un insieme di numeri la cui dimensione è strettamente maggiore di quella dell'insieme di tutti numeri frazionari e strettamente inferiore a quella dell'insieme di tutti i numeri reali; allo stesso modo, è impossibile dimostrare che un tale insieme non esista. Di fatto, Cohen era riuscito a costruire due differenti mondi matematici che soddisfacevano gli assiomi utilizzati in matematica. In uno di questi mondi la risposta al quesito di Cantor era «sì»; nell'altro mondo la risposta era «no».

Alcuni paragonano il risultato di Cohen alla presa di coscienza da parte di Gauss del fatto che esistono geometrie alternative a quella che descrive il mondo fisico che ci circonda. Ma il punto è che i matematici hanno un forte senso di ciò che intendono per numeri. Certo, gli assiomi utilizzati per dimostrare le proprietà di questi numeri potrebbero essere soddisfatti anche da altri numeri «soprannaturali». Tuttavia la maggioranza dei matematici continua a ritenere che la domanda di Cantor ammetta una sola risposta vera per i numeri con cui costruiamo il nostro edificio matematico. Julia Robinson espresse la reazione di quasi tutti i matematici alla dimostrazione di Cohen quando in una lettera a lui indirizzata scrisse: «Per amor del cielo, c'è una sola *vera teo-*

ria dei numeri! È la mia religione». Ma poi cancellò l'ultima frase prima di spedire la lettera.

La rivoluzionaria opera di Cohen, per quanto allarmante fosse per l'ortodossia matematica, gli valse una medaglia Fields. Dopo aver compiuto la scoperta sensazionale del fatto che non possiamo dare una risposta al quesito posto da Cantor, decise che sarebbe passato a quello che considerava il problema più arduo dell'elenco di Hilbert: l'ipotesi di Riemann. Cohen è stato uno dei pochi matematici ad ammettere di lavorare attivamente su questo problema di nota complessità. Finora, tuttavia, l'ipotesi di Riemann ha resistito al suo attacco.

Una cosa interessante è che l'ipotesi di Riemann si trova in un'altra categoria rispetto al quesito di Cantor. Se Cohen replicherà il proprio successo e riuscirà a dimostrare che l'ipotesi è indecidibile sulla base degli assiomi della matematica, avrà dimostrato che l'ipotesi è, di fatto, vera! Infatti, se è indecidibile, allora o è falsa e non possiamo dimostrarlo, oppure è vera e non possiamo dimostrarlo. Ma se è falsa allora deve esistere almeno uno zero che cade fuori della retta critica e che possiamo usare per *dimostrare* che è falsa. Insomma, non può essere falsa senza che noi siamo in grado di dimostrare che lo è. Perciò, l'unica possibilità che l'ipotesi di Riemann sia indecidibile si verifica se essa è vera ma noi non possiamo dimostrare che tutti gli zeri giacciono sulla retta critica. Turing fu uno dei primi a rendersi conto della possibilità di una conferma tanto strana dell'ipotesi di Riemann. Ma pochi pensano che un imbroglio logico di

questa natura possa portare a una soluzione dell'ottavo problema di Hilbert.

Grazie alla macchina universale di Turing, i computer della mente hanno avuto un ruolo fondamentale per la nostra comprensione del mondo matematico. Ma sarebbero state le macchine reali che egli aveva tentato di costruire a prendere il sopravvento nella seconda metà del XX secolo, quando la corrente cambiò a favore di computer fatti di valvole, fili elettrici e poi di silicio. In tutto il mondo, si costruivano macchine che avrebbero permesso ai matematici di scrutare in profondità dentro l'universo dei numeri.

9

L'era dell'informatica: dalla mente al PC

Vi propongo una scommessa. Quando l'ipotesi di Riemann sarà dimostrata, lo sarà senza l'uso di un computer.
Gerhard Frey, scopritore del nesso fondamentale fra l'ultimo teorema di Fermat e le curve ellittiche

Una volta lasciata la scuola, per la maggioranza delle persone il solo incontro con i numeri primi avviene, se mai avviene, tramite le notizie ricorrenti di grossi computer che scoprono il più grande numero primo conosciuto. Il ritaglio di giornale conservato come una reliquia da Julia Robinson illustra come, già negli anni Trenta del secolo scorso, persino le false scoperte al riguardo facessero notizia. Grazie alla dimostrazione di Euclide del fatto che esistono infiniti numeri primi, questo è un genere di notizia che non smetterà mai di comparire sui giornali. Alla fine della Seconda guerra mondiale, il più grande numero primo conosciuto aveva trentanove cifre e deteneva il record dal 1876, l'anno della sua scoperta.

Oggi, il più grande numero primo conosciuto ha oltre un milione di cifre. Ci vorrebbero più pagine di quante ne contiene questo libro per stamparlo, e svariati mesi per leggerlo ad alta voce. È stato il computer a consentirci di raggiungere queste altezze vertiginose. Ma a Bletchley Park Turing stava già pensando a come usare le sue macchine per scovare numeri primi da record.

Benché la macchina universale teorica di Turing avesse la fortuna di possedere una quantità infinita di memoria in cui immagazzinare informazioni, le macchine reali che lui e Newman costruirono a Manchester dopo la guerra erano molto limitate riguardo a ciò che potevano ricordare. Potevano eseguire soltanto calcoli che non richiedevano troppa memoria. Per fare un esempio, tutto quello che serve per generare la serie dei numeri di Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...) è ricordare i due numeri precedenti dell'elenco, e infatti i computer di Turing e Newman non avevano problemi con una sequenza numerica come questa. Turing era anche a conoscenza di un ingegnoso trucco che era stato sviluppato dal più giovane dei Lehmer per trovare i numeri primi speciali che erano stati resi famosi dal monaco francese Marin Mersenne, vissuto nel XVII secolo. Turing si rese conto che per eseguire il test di Lehmer, così come per generare i numeri di Fibonacci, non era necessario disporre di molta memoria. La ricerca dei numeri primi di Mersenne sarebbe stato il compito perfetto per le macchine che Turing e Newman stavano progettando.

Mersenne aveva avuto l'idea di generare numeri primi

moltiplicando 2 per se stesso molte volte e poi sottraendo 1 al risultato. Per esempio, $2 \times 2 \times 2 - 1 = 7$ è un numero primo. Mersenne intuì che, perché $2^n - 1$ avesse la possibilità di risultare un numero primo, era indispensabile scegliere valori di n che fossero a loro volta numeri primi. Tuttavia, ciò non è sufficiente a garantire che $2^n - 1$ sia un numero primo. $2^{11} - 1$ non è un numero primo, nonostante 11 lo sia. Mersenne aveva predetto che 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 67, 127, 257 sarebbero stati i soli valori di n non maggiori di 257 che avrebbero reso $2^n - 1$ un numero primo.

Un numero della dimensione di $2^{257} - 1$ è talmente enorme che la mente umana non sarebbe mai in grado di verificare la fondatezza dell'asserzione di Mersenne. Forse è per questo che egli si sentì tranquillo nel fare un'affermazione tanto audace. Credeva che «l'eternità non sarebbe sufficiente a stabilire se questi sono numeri primi». A guidare la scelta di quei numeri era stata la dimostrazione data da Euclide dell'esistenza di infiniti numeri primi. Si prende un numero come 2^n, che è divisibile per molti numeri, e poi gli si aggiunge o gli si sottrae un'unità nella speranza di renderlo indivisibile.

Benché non desse la certezza di produrre numeri primi, l'intuizione di Mersenne era giusta sotto un aspetto. Dato che i numeri di Mersenne sono adiacenti a 2^n, cioè a numeri dotati di elevata divisibilità, esiste un metodo molto efficace per verificare se sono effettivamente numeri primi. Il metodo fu escogitato nel 1876, quando il matematico francese Édouard Lucas scoprì come avere la conferma che nel caso di $2^{127} - 1$ Mersenne aveva visto giusto. Questo numero pri-

mo di trentanove cifre rimase il più grande che si conoscesse fino all'alba dell'era informatica. Armato del suo nuovo metodo, Lucas riuscì a smascherare la vera natura dell'elenco dei «numeri primi» di Mersenne. La lista dei valori di n che secondo il monaco francese avrebbero reso $2^n - 1$ un numero primo era tutt'altro che esatta: Mersenne aveva lasciato fuori 61, 89 e 107, e aveva incluso erroneamente 67. Ma $2^{257} - 1$ era assolutamente al di fuori della portata di Lucas.

La mistica intuizione di Mersenne si rivelò un'ipotesi fatta alla cieca. La sua reputazione avrebbe potuto subire un grave colpo, eppure il nome di Mersenne sopravvive come quello del re dei grandi numeri primi. Il fatto è che i numeri primi da record di cui si parla sui giornali sono invariabilmente numeri primi di Mersenne. Anche se Lucas riuscì a stabilire con certezza che $2^{67} - 1$ non era primo, il suo metodo non gli permetteva di scomporlo nei numeri primi da cui era formato. Come vedremo, scomporre questi numeri è considerato un problema così difficile che oggi è alla base dei sistemi di sicurezza crittografici, eredi del codice Enigma che Turing decrittò con le sue «bombe» a Bletchley.

Turing non era l'unico a pensare a un nesso fra numeri primi e computer. Come Julia Robinson aveva scoperto da bambina ascoltando la radio, anche la famiglia Lehmer era stata affascinata dall'idea di usare delle macchine per analizzare i numeri primi. All'inizio del secolo Lehmer padre aveva già prodotto una tavola dei numeri primi che arrivava fino a 10.017.000. (Da allora, nessuno ha più pubblicato tavole complete di numeri primi oltre questo limite.) Suo fi-

glio diede un contributo più teorico alla disciplina. Nel 1930, a soli venticinque anni, egli scoprì un modo di perfezionare l'idea di Lucas per verificare quali numeri di Mersenne fossero primi.

Per dimostrare che un numero di Mersenne è primo, e che dunque non è divisibile per alcun numero intero più piccolo, Lehmer capì che si poteva ribaltare il problema. Il numero di Mersenne $2^n - 1$ risulterà primo solo quando $2^n - 1$ è divisore di un altro numero, chiamato numero di Lucas-Lehmer e indicato con L_n. Un numero di Lucas-Lehmer si può costruire, proprio come un numero di Fibonacci, utilizzando i numeri che lo precedono nella sequenza. Per ottenere L_n si eleva al quadrato il numero precedente, L_{n-1}, e si sottrae 2 dal risultato: $L_n = (L_{n-1})^2 - 2$.

Il test comincia a funzionare per $n = 3$ e il corrispondente numero di Lucas-Lehmer risulta $L_3 = 14$. Da qui la sequenza continua con $L_4 = 194$ e $L_5 = 37.634$. A dare a questo test la sua efficacia è il fatto che tutto quello che bisogna fare è generare il numero L_n e verificare se è divisibile per il numero di Mersenne $2^n - 1$, un calcolo relativamente facile. Per esempio, poiché $2^5 - 1 = 31$ divide il numero di Lucas-Lehmer $L_5 = 37.634$, il numero di Mersenne $2^5 - 1$ è un numero primo. Questa semplice verifica permise a Lehmer di passare in rassegna l'intero elenco proposto da Mersenne e dimostrare che Mersenne si era sbagliato sulla primalità di $2^{257} - 1$.

Come fecero Lucas e Lehmer a scoprire quel metodo per la verifica dei numeri di Mersenne? Non è l'idea più ovvia che possa venire in mente. Una scoperta di questo genere è

molto diversa da quella folgorante dell'ipotesi di Riemann o da quella dell'esistenza di una connessione fra numeri primi e logaritmi intuita da Gauss. Il test di Lucas-Lehmer non è deducibile da un andamento regolare che emerge attraverso la sperimentazione o l'osservazione numerica. I due matematici la scoprirono giocherellando con i possibili significati della primalità di $2^n - 1$, girando e rigirando quest'asserzione come un cubo di Rubik finché i colori delle sue facce non si fossero combinate improvvisamente in modo nuovo. Ciascuna rotazione è come un passo della dimostrazione. A differenza di quanto accade con altre dimostrazioni, in cui il punto d'arrivo è chiaro fin dall'inizio, il test di Lucas-Lehmer emerse in sostanza procedendo nella dimostrazione senza avere la minima idea di dove avrebbe portato. Lucas aveva cominciato a ruotare il cubo, ma fu Lehmer che riuscì a disporlo nella configurazione semplice che si utilizza oggi.

Mentre a Bletchley Park stava decifrando i codici Enigma tedeschi, Turing discusse con i suoi colleghi della possibilità di trovare grandi numeri primi utilizzando macchine da calcolo simili alle «bombe» che avevano costruito. Grazie al metodo sviluppato da Lucas e Lehmer, i numeri di Mersenne sono particolarmente suscettibili a una verifica della loro eventuale primalità. Il metodo si adattava perfettamente a essere automatizzato tramite un computer, ma le pressioni dell'impegno bellico presto costrinsero Turing a mettere da parte quei progetti. Dopo la guerra, tuttavia, Turing e Newman poterono riprendere l'idea di scovare nuovi numeri primi di Mersenne. Sarebbe stato un test perfetto per la mac-

china che si proponevano di costruire nel laboratorio di ricerca di Manchester. Benché quella macchina avesse una capacità molto piccola di immagazzinare informazioni, il metodo di Lucas-Lehmer non richiedeva una quantità eccessiva di memoria per ogni singolo passaggio. Per poter calcolare l'n-esimo numero di Lucas-Lehmer, infatti, al computer era sufficiente ricordare il valore dell'$(n-1)$-esimo numero.

Turing era stato sfortunato con gli zeri di Riemann, e le cose non cambiarono quando egli rivolse la propria attenzione alla ricerca dei numeri primi di Mersenne. Il computer costruito a Manchester non riuscì a infrangere il record stabilito con il numero $2^{127} - 1$, che resisteva ormai da settant'anni. Per trovare il successivo numero primo di Mersenne si sarebbe dovuto procedere fino a $2^{521} - 1$, un numero che per un pelo era fuori della portata della macchina ideata da Turing. Per una strana beffa del destino, sarebbe stato il marito di Julia Robinson, Raphael, a rivendicare la scoperta di quel nuovo numero primo da record. Era riuscito a procurasi il manuale di una macchina che Derrick Lehmer aveva costruito a Los Angeles. Ormai Lehmer aveva abbandonato i pignoni e le catene di bicicletta del periodo prebellico. Adesso era direttore del National Bureau of Standards' Institute for Numerical Analysis e aveva creato una macchina chiamata Standard Western Automatic Computer (SWAC). Nella tranquillità del suo ufficio a Berkeley, e senza aver mai posato gli occhi sulla macchina, Raphael Robinson scrisse un programma con cui lo SWAC avrebbe potuto dare la caccia ai numeri primi di Mersenne. Il 30 gennaio del 1952, il

computer scoprì i primi numeri primi che si trovavano al di fuori della portata della capacità di calcolo della mente umana. Poche ore dopo aver stabilito il nuovo record con $2^{521} - 1$, lo SWAC produsse un numero primo ancora più grande: $2^{607} - 1$. In quell'anno Raphael Robinson batté il proprio record altre tre volte. E il più grande numero primo conosciuto divenne $2^{2.281} - 1$. La caccia ai grandi numeri primi finì per essere dominata da chi aveva accesso ai computer più potenti. Fino a metà degli anni Novanta del secolo scorso tutti i nuovi record venivano stabiliti utilizzando computer Cray, i giganti del mondo dell'elaborazione elettronica. La Cray Research, fondata nel 1971, aveva sfruttato il fatto che un computer non deve terminare un'operazione prima di iniziare la successiva. Questa semplice idea fu alla base della creazione di macchine a cui per decenni fu riconosciuto il ruolo di calcolatori più veloci del mondo. A partire dagli anni Ottanta, il computer Cray del Lawrence Livermore Laboratory, in California, sotto l'occhio vigile di Paul Gage e David Slowinski, aveva monopolizzato i record e i titoli dei giornali. Nel 1996, Gage e Slowinski annunciarono la scoperta del loro settimo numero primo record: $2^{1.257.787} - 1$, composto da 378.632 cifre.

Di recente, tuttavia, il vento è cambiato, favorendo concorrenti molto più modesti. Come tanti piccoli Davide che sconfiggono Golia, oggi sono gli umili personal computer a battere un record dopo l'altro. E qual è la fionda che dà loro il potere di sfidare i computer Cray? Internet. Grazie alla forza combinata di un numero enorme di piccoli com-

puter collegati in rete, si ottiene il potenziale che mette questa colonia di formiche nelle condizioni di andare alla caccia dei grandi numeri primi. Non è la prima volta che Internet viene utilizzato per consentire ai dilettanti di fare vera scienza. L'astronomia ha ottenuto grandi benefici assegnando a migliaia di astrofili un pezzettino di cielo da perlustrare. Internet aveva fornito la rete attraverso cui coordinare questo sforzo astronomico. Ispirato dal successo degli astronomi, un programmatore americano, George Woltman, ha messo a disposizione di tutti su Internet un software che, una volta scaricato, assegna al vostro PC una minuscola porzione della distesa infinita dei numeri. Invece di dirigere i propri telescopi sul cielo notturno alla ricerca di una nuova supernova, i matematici dilettanti usano il tempo di inattività dei loro computer per perlustrare remoti angoli della galassia numerica a caccia di nuovi numeri primi e di nuovi record.

La ricerca non è scevra di pericoli. Una delle reclute di Woltman lavorava per un'importante compagnia telefonica statunitense e si era procurato l'aiuto di 2.585 dei computer dell'azienda per la sua caccia ai numeri primi di Mersenne. L'azienda cominciò a sospettare che qualcosa non andasse come doveva quando i computer di Phoenix, che di regola impiegavano cinque secondi per reperire i numeri di telefono, iniziarono a impiegarci cinque minuti. Quando l'FBI riuscì finalmente a individuare la fonte di quel rallentamento, il dipendente ammise che «tutta quella potenza di calcolo era una tentazione troppo forte per me». La compagnia te-

lefonica ha mostrato pochissima comprensione per l'attività scientifica del suo dipendente e lo ha licenziato.

La prima scoperta di un nuovo numero primo di Mersenne da parte di questa banda di cacciatori via Internet giunse pochi mesi dopo l'annuncio fatto dal Lawrence Livermore Laboratory del 1996. Joel Armengaud, un programmatore parigino, trovò l'oro nel piccolo strato di numeri che stava scavando nell'ambito del progetto di Woltman. Per i grandi mezzi di comunicazione, la sua scoperta giunse un po' troppo presto rispetto a quella precedente. Quando contattai il «Times» per riferire del ritrovamento di quel nuovo numero primo da record, mi sentii rispondere che loro pubblicavano quella storia solo ad anni alterni. In quel senso l'offerta di Slowinski e Gage, i gemelli del Cray, si adattava perfettamente alla domanda, con scoperte che, a partire dal 1979, avvenivano in media ogni due anni.

Ma in tutto questo c'era qualcosa di più della scoperta di nuovi numeri primi. Si era di fronte a un punto di svolta per il ruolo del computer nella ricerca dei numeri primi e la rivista specializzata «Wired» non se lo lasciò sfuggire. «Wired» dedicò un articolo a quella che oggi è nota come Great Internet Mersenne Prime Search, o GIMPS. Woltman è riuscito a reclutare oltre duecentomila computer in tutto il mondo, creando quella che è a tutti gli effetti una gigantesca macchina di elaborazione in parallelo. Non che i pezzi da novanta come i computer Cray siano fuori dal gioco. Adesso sono partner alla pari, con il compito di verificare le scoperte dei terribili piccoletti.

Fino al 2002, sono stati cinque i fortunati vincitori della caccia ai numeri primi di Mersenne. Alla scoperta parigina ne seguì una in Inghilterra e poi una terza in California. Ma fu Nayan Hajratwala di Plymouth in Michigan a fare il colpaccio nel giugno del 1999. Il numero primo da lui scoperto, $2^{6.972.593} - 1$, ha infranto il traguardo del milione di cifre (ne comprende ben 2.098.960). Oltre a costituire di per sé un premio simbolico, quest'impresa ha fatto vincere a Hajratwala 50.000 dollari in contanti offerti dalla Electronic Frontier Foundation, un'organizzazione californiana che si è autoproclamata tutrice delle libertà civili dei *netizens*, i cittadini della rete. Se il successo di Hajratwala ha stimolato il vostro appetito, sappiate che la fondazione ha ancora mezzo milione di dollari con cui premiare gli scopritori di altri grandi numeri primi. Il record stabilito da Hajratwala fu battuto nel novembre 2001 dallo studente canadese Michael Cameron, che grazie al suo PC ha dimostrato la primalità di $2^{13.466.917} - 1$, un numero con oltre quattro milioni di cifre. I matematici ritengono che esistano infiniti di questi speciali numeri primi di Mersenne in attesa di essere scoperti.

Il computer: la morte della matematica?

Se il computer può sovrastarci nella capacità di calcolo, ciò non rende i matematici superflui? Per fortuna no. Lungi dal preannunciare la fine della matematica, questo fatto evidenzia la vera differenza che intercorre fra l'artista creativo che è il

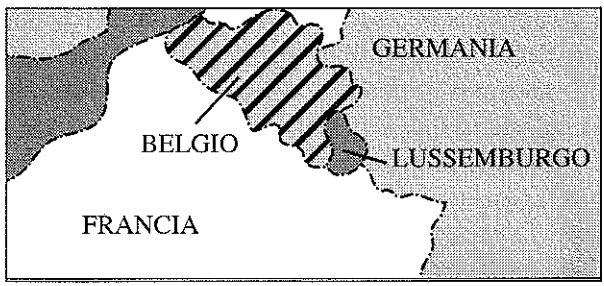
matematico e l'esecutore di calcoli tediosi che è il computer. Non c'è dubbio che il computer sia un prezioso alleato per i matematici nell'esplorazione del loro mondo numerico, e un fidato sherpa nell'ascesa al monte Riemann, ma è altrettanto certo che non potrà mai prendere il posto di un matematico. Anche se un computer può facilmente battere un matematico in un qualsiasi calcolo finito, gli manca (ancora) l'immaginazione necessaria per abbracciare un quadro infinito e rivelare la struttura e le regolarità che sono alla base della matematica.

Quando andiamo alla ricerca di grandi numeri primi con l'aiuto di un computer, per esempio, otteniamo una migliore comprensione della loro natura? Anche se impariamo a cantare note sempre più alte, questo non ci svela la struttura musicale che esse nascondono. Già Euclide ci aveva fornito la certezza che ci sarà sempre un numero primo più grande da trovare. Non sappiamo, tuttavia, se i numeri di Mersenne produrranno infiniti numeri primi. Può darsi che Michael Cameron abbia scoperto il trentanovesimo e ultimo numero primo di Mersenne. (O, meglio, il penultimo: il 17 novembre 2003 è stato scoperto il quarantesimo numero di Mersenne.) Quando gli parlai, Paul Erdős mi disse che considerava la dimostrazione dell'esistenza di infiniti primi di Mersenne uno dei massimi problemi irrisolti in teoria dei numeri. L'opinione generale è che esistano effettivamente infiniti valori di n tali per cui $2^n - 1$ risulta un numero primo. Ma, se questo è vero, è estremamente improbabile che sarà un computer a dimostrarlo.

Con questo non voglio dire che i computer non possano

dimostrare alcunché. Dato un insieme di assiomi e alcune regole di deduzione, è possibile istruire un computer in modo che sforni teoremi matematici a bizzeffe. Il punto è che, come uno scimpanzé a una macchina per scrivere, il computer non sarà in grado di distinguere fra teoremi gaussiani e addizioni da scuola elementare. I matematici hanno sviluppato le capacità critiche che consentono loro di discriminare fra i teoremi che sono importanti e quelli che non lo sono. La sensibilità estetica di una mente matematica permette di apprezzare le dimostrazioni che costituiscono composizioni magnifiche e di rifuggire da quelle brutte. E anche se una brutta dimostrazione è valida tanto quanto una bella, nell'eleganza si è sempre identificato un criterio importante per tracciare la rotta migliore da seguire quando ci si muove nel mondo matematico.

Il primo caso di dimostrazione di un teorema ottenuta utilizzando un computer si è avuto con una questione nota come «problema dei quattro colori», che nacque come una semplice curiosità matematica. Il problema si riferisce a un fatto in cui probabilmente tutti noi ci siamo imbattuti da bambini: se si vuole dipingere una carta geografica in modo che due Paesi confinanti non abbiano mai colori uguali, è sempre possibile farlo usando quattro colori soltanto. Per quanto ci si impegni a ridisegnare nella maniera più creativa possibile i confini nazionali, sembra impossibile ottenere una mappa politica dell'Europa che necessiti di un numero di colori superiore a quattro. Le attuali frontiere di Francia, Germania, Belgio e Lussemburgo, d'altra parte, dimostrano che i colori necessari sono almeno quattro.



Sono necessari almeno quattro colori per dipingere questa mappa in modo tale che non ci siano Paesi confinanti dello stesso colore.

Ma è possibile dimostrare che quattro colori sono sufficienti per qualsiasi mappa?

La questione fu posta pubblicamente per la prima volta nel 1852, quando uno studente di legge, Francis Guthrie, scrisse a suo fratello, un matematico dello University College di Londra, domandandogli se qualcuno aveva dimostrato che quattro colori sarebbero sempre stati sufficienti. In verità all'epoca erano ben pochi a pensare che quella questione fosse importante. Un certo numero di matematici di secondo piano vi si cimentarono nel tentativo di fornire una dimostrazione a Guthrie. Ma, dato che la dimostrazione continuava a eluderli, poco alla volta il problema si fece strada verso il vertice della scala delle abilità matematiche. Persino Hermann Minkowski, il miglior amico di Hilbert a Gottinga, vi si bruciò le dita. La questione del problema dei quattro colori fu sollevata durante un corso universitario te-

nuto da Minkowski. «Questo teorema non è stato ancora dimostrato solo perché se ne sono occupati matematici di terzo rango» annunciò il professore. «Io ritengo di poterlo dimostrare.» Per varie lezioni litigò con le proprie idee alla lavagna. Una mattina, mentre entrava nell'aula dove si teneva il corso, si udì un fortissimo tuono. «Il cielo è adirato a causa della mia arroganza» ammise. «La mia dimostrazione non regge.»

Quante più persone tentavano e fallivano, tanto più il prestigio del problema cresceva, soprattutto a causa dell'estrema semplicità del suo enunciato. Resistette a tutti i tentativi di dimostrazione fino al 1976, oltre un secolo dopo la lettera spedita da Francis Guthrie al fratello. Due matematici dell'università dell'Illinois, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, mostrarono che invece di affrontare il compito impossibile di colorare tutte le infinite mappe immaginabili, il problema poteva essere ricondotto all'analisi di 1.500 differenti mappe fondamentali. Fu un passo avanti decisivo. Era come la scoperta di una tavola periodica cartografica contenente le mappe elementari che permettevano di costruire tutte le altre. Ma se Appel e Haken avessero voluto verificare a mano ciascuna di queste mappe «atomiche», anche cominciando nel 1976, oggi sarebbero ancora impegnati a colorarle. Così, per la prima volta, si ricorse all'aiuto un computer. Ci vollero 1.200 ore di tempo macchina, ma alla fine la risposta arrivò: ogni mappa poteva essere colorata usando quattro colori. Combinata alla forza bruta del computer, la genialità umana con cui si era dimostrato che bastava consi-

derare quelle 1.500 mappe di base per comprendere tutte le altre mappe confermò ciò che Guthrie aveva ipotizzato nel 1852: per qualsiasi mappa i colori necessari non erano mai più di quattro.

Sapere che il teorema dei quattro colori è vero non ha alcuna utilità pratica. I cartografi non emisero un sospiro collettivo di sollievo nel ricevere la notizia che non sarebbero dovuti uscire a comprare un quinto vasetto di colore. I matematici non erano in attesa spasmodica della conferma di quel risultato per poter proseguire nella loro esplorazione: al di là non riuscivano a scorgere niente che valesse particolarmente la pena di studiare. Quella non era l'ipotesi di Riemann, dalla cui dimostrazione dipendevano migliaia di risultati. Il problema dei quattro colori era significativo solo perché la nostra incapacità di risolverlo indicava che non avevamo ancora una comprensione sufficiente dello spazio bidimensionale per poterlo fare. Finché rimase irrisolto, il problema spronò i matematici a cercare una comprensione più profonda dello spazio attorno a noi. È per questo che la dimostrazione di Appel e di Haken lasciò molti insoddisfatti. Il computer ci aveva dato una risposta ma non aveva contribuito ad approfondire le nostre conoscenze.

Il fatto che la soluzione del problema dei quattro colori ottenuta da Appel e Haken con l'ausilio del computer catturi il vero spirito della «dimostrazione» oppure no, è stato oggetto di un dibattito acceso. Il ruolo avuto dal computer provocò in molti una sensazione di disagio, anche se quasi

tutti sapevano che la dimostrazione aveva maggiori probabilità di essere corretta di quante non ne avessero molte dimostrazioni ottenute dall'uomo. Ma una dimostrazione non dovrebbe produrre comprensione? Come amava dire Hardy, «una dimostrazione matematica dovrebbe assomigliare a una costellazione semplice e dai contorni netti, non a una Via Lattea dispersa». La dimostrazione al computer del problema dei quattro colori faceva ricorso a una laboriosa ricostruzione del caos dei cieli invece di offrire una comprensione più profonda del perché i cieli sono così come ci appaiono.

La dimostrazione assistita dal computer evidenziava un fatto: il piacere della matematica non si trae soltanto dal risultato finale. Noi non leggiamo storie di misteri matematici solo per scoprire chi è il colpevole. Il piacere è dato dal vedere come le tortuosità della trama si dipanano man mano che ci si avvicina al momento della rivelazione. La dimostrazione del problema dei quattro colori da parte di Appel e Haken ci ha privato di quel senso di improvvisa illuminazione (di quel «Ecco! Adesso capisco!») a cui aneliamo quando ci immergiamo in una lettura matematica. Ciò che amiamo è condividere il momento dell'inattesa rivelazione provata la prima volta da colui che ha creato una dimostrazione. Dell'eventualità che un giorno i computer potranno provare emozioni si dibatterà per decenni, ma di certo la dimostrazione del problema dei quattro colori non ci ha offerto l'opportunità di condividere l'eventuale sensazione d'euforia che il computer potrebbe aver provato.

A dispetto delle sensibilità estetiche ferite, tuttavia, il computer ha continuato a servire la comunità matematica nella dimostrazione di teoremi. Una volta che un problema è stato ricondotto alla verifica di un numero finito di possibilità, un computer può essere utile. E lo è. Ciò significa che un computer può aiutarci nell'ascesa alla vetta dell'ipotesi di Riemann? Quando Hardy morì, poco dopo la fine della Seconda guerra mondiale, si sospettava che l'ipotesi di Riemann potesse essere falsa. Turing comprese che se l'ipotesi fosse stata falsa un computer sarebbe potuto servire a scoprirlo. In tal caso, infatti, una macchina può essere programmata per andare alla ricerca degli zeri finché non ne trova uno che cade fuori della retta magica di Riemann. Ma se l'ipotesi è vera, allora il computer è del tutto inutile: non potrà mai dimostrare che tutti gli infiniti zeri cadono sulla retta. Il massimo che può fare è produrre una quantità sempre maggiore di indizi a sostegno della nostra fede nella fondatezza dell'intuizione di Riemann.

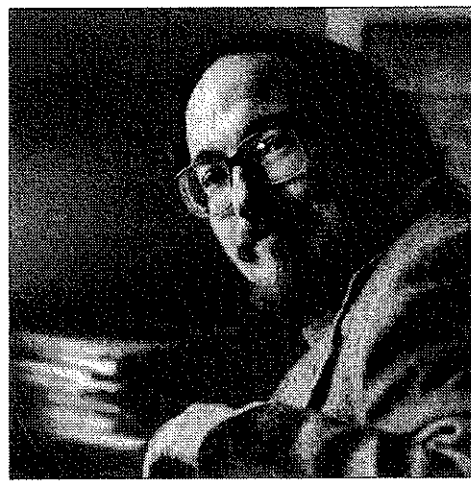
Il computer soddisfaceva anche un altro bisogno. All'epoca della morte di Hardy, i matematici si trovavano in una situazione di stallo. I progressi teorici compiuti sull'ipotesi di Riemann si erano esauriti. Sembrava che, date le tecniche disponibili, Hardy, Littlewood e Selberg avessero ottenuto i migliori risultati possibili riguardo all'individuazione dei punti a livello del mare nel paesaggio di Riemann. Avevano spremuto da quelle tecniche tutto ciò che se ne poteva ricavare. Buona parte dei matematici concordava sul fatto che era necessario escogitare nuove idee se ci

si voleva avvicinare ulteriormente alla dimostrazione dell'ipotesi di Riemann. E in assenza di idee nuove il computer dava un'impressione di progresso. Ma era solo un'impressione: la verità è che il ricorso al computer mascherava un'evidente mancanza di progressi sulla strada che avrebbe dovuto condurre a una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann. Il calcolo automatico divenne un surrogato del pensiero, un chewing-gum mentale con cui ci si cullava nell'illusione di fare qualcosa quando in realtà non si sapeva dove andare a sbattere la testa.

Zagier, il moschettiere della matematica

La formula segreta che Siegel aveva scoperto nel 1932 in mezzo agli appunti inediti di Riemann serviva a calcolare in modo preciso ed efficiente la posizione degli zeri nel paesaggio zeta. Turing aveva tentato di sveltire quei calcoli usando il suo complicato sistema di ruote dentate, ma ci sono volute macchine più moderne per liberare tutto il potenziale di quella formula. Una volta che la formula segreta fu inserita in un computer elettronico, si poté cominciare a sondare regioni del paesaggio zeta che in precedenza era inimmaginabile poter raggiungere. Negli anni Sessanta, mentre l'uomo iniziava a esplorare l'universo con veicoli spaziali privi di equipaggio, i matematici assegnarono ai computer il compito di tracciare un percorso che conducesse alle regioni più remote del paesaggio di Riemann.

Quanto più i matematici si spingevano a nord nella ricerca degli zeri della funzione zeta, tanti più indizi raccoglievano. Ma qual era la reale utilità di quegli indizi? Quanti zeri sarebbe stato necessario individuare sulla retta prima di convincersi che l'ipotesi di Riemann fosse vera? Il problema è che, come aveva mostrato Littlewood con il suo lavoro sull'ipotesi, di rado in matematica gli indizi forniscono un terreno su cui è possibile edificare certezze. Ecco perché molti rigettavano l'idea che il computer potesse rivelarsi uno strumento utile per l'analisi dell'ipotesi di Riemann. Ma c'era in serbo una sorpresa che avrebbe cominciato a convincere anche gli scettici più irriducibili della possibilità fondata che l'ipotesi di Riemann fosse vera. All'inizio degli anni Settanta, alla testa di questa piccola banda di scettici c'era Don Zagier. Zagier è una delle personalità più vigorose dell'odierno circuito matematico, un uomo la cui figura si staglia elegante mentre percorre con decisione i corridoi del Max Planck Institut für Mathematik di Bonn, la risposta tedesca all'Institute for Advanced Study di Princeton. Come un moschettiere della matematica, Zagier brandisce il suo affilatissimo intelletto, pronto a fare a fette ogni problema che gli capiti sotto tiro. Il suo entusiasmo per la disciplina e l'energia con cui la affronta ti scaraventano in un turbine di idee espresse con voce crepitante e con una velocità che ti lascia senza fiato. Ha un approccio giocoso alla disciplina, e ha sempre pronto un rompicapo matematico con cui insaporire le colazioni all'istituto di Bonn.



Don Zagier, professore al Max Planck Institut
für Mathematik di Bonn.

Il desiderio di alcuni di credere nell'ipotesi di Riemann sulla base di ragioni puramente estetiche, ignorando la mancanza di indizi concreti, aveva finito per esasperare Zagier. La fede nell'ipotesi si basava probabilmente su un senso di deferenza verso la semplicità e la bellezza in matematica e su poco altro. Uno zero che fosse caduto fuori della retta avrebbe rappresentato una bruttura in quel meraviglioso paesaggio. Ogni zero contribuiva con una nota alla melodiosa musica dei numeri primi. Enrico Bombieri propone una sua immagine di quello che significherebbe l'eventuale falsità dell'ipotesi di Riemann: «Pensate di andare a un con-

certo e di ascoltare i musicisti che suonano tutti insieme in perfetta armonia. Poi all'improvviso interviene una grossa tuba che emette un suono fortissimo e sommerge tutto il resto». C'è una tale profusione di bellezza nel mondo matematico che non possiamo – non osiamo – credere che la Natura abbia scelto un universo disarmonico in cui l'ipotesi di Riemann risulta falsa.

Se su questo argomento Zagier era lo scettico per eccellenza, Bombieri rappresentava il prototipo di coloro che credevano ciecamente nell'ipotesi di Riemann. Nei primi anni Settanta, quando non si era ancora trasferito a Princeton, Bombieri era professore in Italia. «Per lui» spiegava Zagier «la fondatezza dell'ipotesi di Riemann è un articolo di fede. Il fatto che debba essere vera è un atto di fede religiosa per Bombieri; se non fosse così, tutto il mondo sarebbe sbagliato». In effetti, come precisava lo stesso Bombieri, «al liceo avevo studiato molti dei filosofi medievali. Uno di questi, Guglielmo di Occam, promosse l'idea secondo cui, quando si deve scegliere fra due spiegazioni, bisognerebbe sempre scegliere la più semplice. Il rasoio di Occam, come viene chiamato questo principio, esclude ciò che è complesso e sceglie ciò che è semplice». Per Bombieri, uno zero che fosse caduto fuori della retta di Riemann sarebbe stato come uno strumento dell'orchestra «che sommerge tutti gli altri, una situazione esteticamente disgustosa. Come seguace di Guglielmo di Occam, non posso che rigettare una tale conclusione e accettare la verità dell'ipotesi di Riemann».

Quando Bombieri si recò in visita all'istituto di Bonn e le discussioni durante il tè si incentrarono sull'ipotesi di Riemann, lo scontro divenne inevitabile. Zagier, inguaribile spaccone della matematica, non si lasciò sfuggire l'occasione per sfidare Bombieri a duello. «Mentre bevevamo il tè, gli dissi che non c'erano ancora indizi sufficienti a convincermi di una cosa o dell'altra. Perciò ero pronto a scommettere alla pari una somma di denaro sull'infondatezza dell'ipotesi di Riemann. Non che pensassi che dovesse essere necessariamente falsa, ma ero disposto a fare l'avvocato del diavolo.»

«Bene» aveva replicato Bombieri. «Sarò certamente in grado di accettare i termini della scommessa.» E Zagier si rese conto che la sua offerta di una puntata alla pari era stata sciocca: Bombieri riponeva una tale fiducia nell'ipotesi di Riemann che avrebbe tranquillamente accettato di scommettere sulla sua fondatezza a un miliardo contro uno. Ci si accordò sulla posta: due bottiglie di ottimo bordeaux che avrebbe scelto il vincitore.

«Volevamo che la scommessa si decidesse nel corso della nostra vita» spiega Zagier. «Tuttavia, c'erano ottime probabilità che saremmo finiti nella tomba prima che i giochi fossero fatti. D'altra parte non volevamo porre un limite temporale, del tipo che dopo dieci anni avremmo lasciato cadere la scommessa. Sembrava sciocco. Che cosa c'entrano dieci anni con l'ipotesi di Riemann? Ci serviva qualcosa di matematico.»

Perciò Zagier propose quanto segue. Se la macchina di

Turing si era rotta dopo aver calcolato i primi 1.104 zeri, nel 1956 Derrick Lehmer era stato più fortunato. In California era riuscito a far verificare dalle sue macchine che i primi 25.000 zeri cadevano sulla retta. All'inizio degli anni Settanta, poi, un famoso calcolo aveva confermato che i primi tre milioni e mezzo di zeri si trovavano effettivamente sulla retta. Quella dimostrazione era stata un incredibile tour de force, in cui si erano sfruttate alcune brillanti tecniche teoriche per spingere i calcoli fino ai limiti estremi della tecnologia informatica allora disponibile. Racconta Zagier:

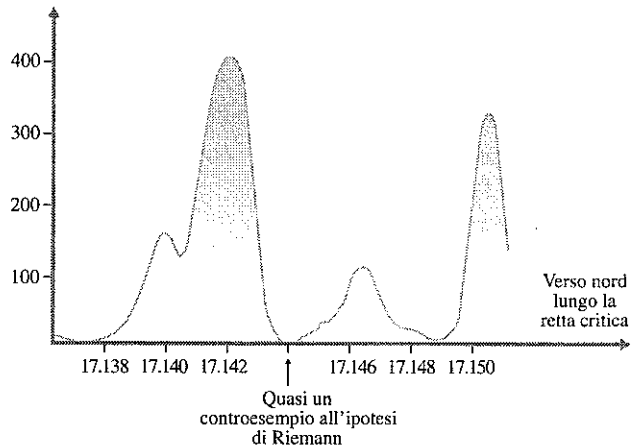
> Così dissi, d'accordo, in questo momento sono tre milioni gli zeri di cui si è calcolata la posizione, ma io non sono ancora convinto, anche se quasi tutti direbbero *ma che cos'altro vuoi, benedetto iddio... tre milioni di zeri...* È proprio questo il punto di quello che ti sto dicendo. Non è così. Tre milioni non bastavano a convincermi. Mi sarebbe piaciuto aver fatto la scommessa un po' prima, perché ormai stavo cominciando a convincermi. Mi sarebbe piaciuto aver fatto la scommessa a centomila zeri perché a quel punto non c'era assolutamente alcuna ragione di credere nell'ipotesi di Riemann. Quando si analizzano i dati, centomila zeri si rivelano totalmente inutili. Equivalgono sostanzialmente a zero prove. A tre milioni di zeri la cosa comincia a farsi interessante.

Ma Zagier riconosceva che trecento milioni di zeri rappresentavano uno spartiacque importante. C'erano delle ra-

gioni teoriche per ritenere che le prime migliaia di zeri dovessero trovarsi sulla retta magica di Riemann. Man mano che si procedeva verso nord, tuttavia, le ragioni per le quali gli zeri precedenti dovevano cadere sulla retta di Riemann cominciavano a essere sovrastate da ragioni ancora più forti a sostegno del fatto che gli zeri dovessero cominciare a cadere fuori della retta.

Zagier sapeva che, una volta arrivati a trecento milioni, sarebbe stato un miracolo se gli zeri non si fossero discostati dalla retta.

Zagier basò la sua analisi su un grafico che gli avrebbe permesso di seguire l'andamento della pendenza delle alture e delle valli nel paesaggio zeta lungo la retta magica di Riemann. Il grafico di Zagier rappresentava una nuova prospettiva da cui osservare la sezione trasversale del paesaggio di Riemann tracciata in corrispondenza della retta critica. La cosa interessante era che questa prospettiva permetteva una nuova interpretazione dell'ipotesi di Riemann. Se il grafico avesse attraversato la retta critica in un punto qualsiasi, allora in quel punto doveva esserci uno zero che cadeva fuori della retta, inficiando così l'ipotesi di Riemann. All'inizio il grafico non si avvicina mai alla retta critica, anzi se ne allontana salendo. Ma man mano che si procede verso nord il grafico comincia a scendere fino ad accostarsi alla retta. Di tanto in tanto il grafico di Zagier tenta di aprirsi un varco attraverso la retta ma, come mostra la figura seguente, sembra che qualcosa gli impedisca di attraversarla.



Il grafico utilizzato da Zagier mostra un punto sulla retta critica in cui c'è quasi un controesempio all'ipotesi di Riemann. Se il grafico attraversasse l'asse orizzontale, allora l'ipotesi di Riemann sarebbe certamente falsa.

In sostanza, tanto più si avanza verso nord quanto più appare probabile che questo grafico possa attraversare la linea critica. Zagier sapeva che il primo vero punto debole si sarebbe verificato attorno al trecentomilionesimo zero. Questa regione della retta critica avrebbe rappresentato un test probante. Una volta che ci si fosse spinti tanto a nord, se il grafico non aveva ancora attraversato la retta, allora doveva sicuramente esserci un motivo per cui non lo faceva. E quel motivo, ragionava Zagier, non poteva che essere la fondatezza dell'ipotesi di Riemann. Ecco perché Zagier fissò la soglia per la scommessa a trecento milioni

di zeri. Bombieri si sarebbe aggiudicato la posta sia nel caso in cui fosse stata trovata una dimostrazione dell'ipotesi sia nel caso in cui si fossero calcolate le posizioni dei primi trecento milioni di zeri senza imbattersi in un controesempio.

Zagier si rendeva conto che i computer degli anni Settanta non erano ancora assolutamente in grado di esplorare quella remota regione della retta magica di Riemann. Fino ad allora i computer erano riusciti a calcolare le posizioni di tre milioni e mezzo di zeri. Considerando la crescita della tecnologia informatica a quell'epoca, Zagier stimò che ci sarebbero voluti almeno trent'anni prima di poter determinare la posizione dei primi trecento milioni di zeri. Ma non aveva fatto i conti con la rivoluzione informatica che lo aspettava giusto dietro l'angolo.

Per circa cinque anni non accadde nulla. La potenza dei computer, seppur lentamente, cresceva, ma individuare anche solo le posizioni di un numero doppio di zeri, per non parlare di cento volte tanti, avrebbe richiesto una tale quantità di lavoro che nessuno se ne preoccupava. Dopo tutto, in questo tipo d'attività non aveva alcun senso spendere enormi quantità d'energia al solo scopo di raddoppiare il numero degli indizi. Ma poi, passati cinque anni, i computer si misero di colpo ad andare molto più veloci, e due team accettarono la sfida di sfruttare quell'inedita potenza di calcolo per stabilire la posizione di altri zeri. Un team, guidato da Herman te Riele, lavorava ad Amsterdam; l'altro team era australiano e Richard Brent ne era il responsabile.

Brent fu il primo a fare un annuncio, nel 1978: i primi settantacinque milioni di zeri cadevano sulla retta. A quel

punto il team di Amsterdam unì le proprie forze a quelle del gruppo di Brent. Dopo un anno di lavoro, i due gruppi pubblicarono un corposo articolo, redatto con grande cura e presentato in maniera stupenda. Avevano fatto tutto a puntino. Ed erano arrivati a calcolare le posizioni degli zeri fino a... duecento milioni! Mentre ne parla Zagier ride:

> Tirai un sospiro di sollievo, perché quello era un progetto veramente enorme. Grazie a Dio si erano fermati a duecento milioni. Naturalmente avrebbero potuto arrivare fino a trecento milioni, ma grazie a Dio non lo fecero. Adesso, pensai, mi sarà concessa una proroga di molti anni. Non avrebbero continuato solo per progredire di un misero cinquanta per cento. Avrebbero atteso finché non avessero avuto la possibilità di raggiungere il miliardo di zeri. Perciò ci sarebbero voluti molti anni. Purtroppo non avevo tenuto conto del mio buon amico Hendrik Lenstra, che era a conoscenza della scommessa e si trovava ad Amsterdam.

Lenstra andò da te Riele e gli chiese: «Perché vi siete fermati a duecento milioni? Non sapete che se arrivate a trecento milioni Don Zagier perderà una scommessa?». Così il team proseguì fino a trecento milioni. Naturalmente non trovarono un solo zero che cadesse fuori della linea e Zagier dovette pagare la sua scommessa. Portò le due bottiglie a Bombieri, che bevve la prima insieme a lui. Zagier ci tiene a far notare che quella è probabilmente la bottiglia più costosa che sia stata mai bevuta, dato che

duecento milioni non avevano niente a che vedere con la mia scommessa. Il calcolo era stato fatto indipendentemente. Ma per gli ultimi cento milioni di zeri la questione è diversa: decisero di calcolarli allora solo perché avevano saputo della mia scommessa. Ci volle un tempo di elaborazione di circa mille ore per calcolare quei cento milioni in più. All'epoca il costo del tempo di elaborazione era di settecento dollari all'ora. E poiché fecero quel calcolo al solo scopo di farmi perdere la scommessa e costringermi a pagare le mie due bottiglie di vino, io sostengo che quelle due bottiglie valevano trecentocinquantamila dollari cadauna, che è molto più del prezzo della bottiglia di vino più cara che sia mai stata venduta all'asta.

Più importante, tuttavia, era il fatto che adesso, nell'opinione di Zagier, la massa degli indizi in favore dell'ipotesi di Riemann era diventata schiacciante. Come strumento di calcolo il computer aveva finalmente raggiunto una potenza sufficiente a esplorare i territori settentrionali del paesaggio zeta di Riemann quanto bastava perché ci fossero tutte le opportunità di trovare un controesempio. A dispetto dei numerosi tentativi del grafico ideato da Zagier di sfondare la retta critica di Riemann, era evidente che qualcosa agiva come una potente forza di repulsione, impedendo al grafico di oltrepassare la retta. Il motivo? L'ipotesi di Riemann.

«È questo a fare di me un convinto assertore della fondatezza dell'ipotesi di Riemann» ammette oggi Zagier. Egli paragona il ruolo del computer a quello di un acceleratore di particelle usato per confermare le teorie della fisica delle par-

ticelle elementari. I fisici hanno un modello dei costituenti della materia, ma per sottoporre a verifica quel modello è necessario generare un'energia sufficiente a fare a pezzi l'atomo. Per Zagier, trecento milioni di zeri rappresentavano l'energia sufficiente per verificare se l'ipotesi di Riemann avesse buone possibilità di essere vera:

> Questa, secondo la mia opinione, è una prova convincente al cento per cento del fatto che ci sia qualcosa che impedisce al grafico di attraversare la retta, e la sola cosa che riesco a immaginare possa avvenire è, ne sono assolutamente convinto, che l'ipotesi di Riemann sia vera. E adesso credo all'ipotesi di Riemann con la stessa convinzione con cui ci crede Bombieri, non a priori – per la sua grande bellezza ed eleganza o a causa dell'esistenza di Dio – ma perché abbiamo questa prova.

Jan van de Lune, uno dei componenti del team di te Riele, oggi è in pensione. Ma i matematici non guariscono mai completamente dal virus della matematica, nemmeno quando hanno ormai lasciato i loro uffici. Usando lo stesso programma che il team aveva usato decenni prima e tre personal computer che tiene in casa, van de Lune è riuscito a verificare che i primi 6,3 miliardi di zeri obbediscono tutti all'ipotesi di Riemann. Per quanto a lungo i suoi tre computer possano continuare a calcolare le posizioni degli zeri, non c'è alcuna possibilità che producano una dimostrazione dell'ipotesi. Ma se uno zero che cade fuori della retta esiste, allora c'è la possibilità concreta che il computer abbia un ruolo

nella sua individuazione, ovvero nello smascheramento della natura puramente illusoria dell'ipotesi di Riemann.

È qui che il computer si trova nel proprio elemento: come demolitore di congetture. Negli anni Ottanta il calcolo delle posizioni degli zeri fu utilizzato per demolire un parente stretto dell'ipotesi di Riemann: la congettura di Mertens. Ma quei calcoli non furono eseguiti nella tranquillità di un dipartimento di matematica. L'interesse si spostò sui calcoli delle posizioni degli zeri compiuti da una fonte piuttosto inattesa: la compagnia telefonica AT&T.

Odlyzko, il maestro di calcoli del New Jersey

Nel cuore del New Jersey, vicino alla sonnacchiosa cittadina di Florham Park, prospera un'improbabile centrale di talento matematico sotto l'egida commerciale dei laboratori di ricerca dell'AT&T. Una volta entrati nell'edificio, potreste avere l'impressione erronea di trovarvi nel dipartimento di matematica di un'università. Siete invece nella sede di una grande impresa di telecomunicazioni. Le origini di questo centro di ricerca risalgono agli anni Venti del Novecento, quando l'AT&T creò i Bell Laboratories. Durante la guerra Turing aveva trascorso un breve periodo nei Bell Laboratories di New York. Era stato coinvolto nel progetto di un sistema di codifica vocale in grado di garantire comunicazioni telefoniche sicure fra Washington e Londra. Turing dichiarò che il periodo trascorso ai Bell Laboratories fu più eccitante

dei giorni di Princeton, anche se in questa sua affermazione potrebbe avere un qualche peso la vita notturna del Village a Manhattan. Erdős faceva spesso visita alla sede centrale del New Jersey nel corso dei suoi vagabondaggi matematici.

Con l'esplosione tecnologica che investì l'industria delle comunicazioni negli anni Sessanta, era chiaro che per mantenere un vantaggio competitivo l'AT&T aveva bisogno di assicurarsi una competenza matematica sempre maggiore. Dopo la rapida espansione delle università in quel decennio, i Settanta furono anni di magra per i matematici che puntavano a incarichi in ambito accademico. Espandendo i propri centri di ricerca, l'AT&T riuscì ad attrarre una parte di questo eccesso di cervelli. Anche se i vertici aziendali speravano che alla fine la ricerca si sarebbe tradotta in innovazioni tecnologiche, tuttavia erano ben felici di lasciare che i loro scienziati si dedicassero alle proprie passioni matematiche. Può sembrare un atteggiamento altruistico, ma in realtà si trattava di buoni affari: a causa del monopolio commerciale di cui l'azienda godeva negli anni Settanta, il governo aveva imposto alcune restrizioni sui possibili modi di spendere i profitti. Investire nei laboratori di ricerca era perciò considerato un metodo accorto per assorbire una parte dei profitti.

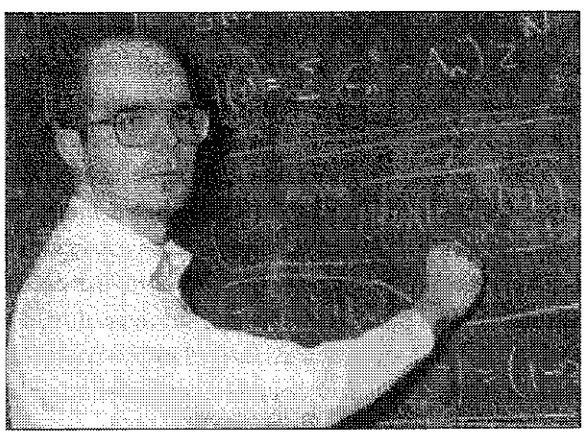
Quali che fossero le ragioni alla base di quella scelta, la matematica deve essere molto grata all'AT&T. Alcuni dei progressi teorici più interessanti degli ultimi tempi nascono dalle idee uscite dai suoi laboratori, laboratori che sono una combinazione affascinante dell'ambiente accademico e del pratico mondo degli affari. Quando li ho visitati per parlare

ai matematici che vi lavorano, ho avuto l'opportunità di vedere con i miei occhi che cosa significhi questa combinazione. Dovendo affrontare il compito di ottimizzare le offerte dell'AT&T a un'asta per l'assegnazione della banda di frequenza per i telefoni cellulari, nel corso di una colazione di lavoro alcuni matematici stavano presentando un modello teorico che avrebbe fornito all'azienda la miglior strategia di negoziazione nel complesso processo delle licitazioni. Dal loro punto di vista quel modello avrebbe benissimo potuto essere la miglior strategia da applicare a una partita di scacchi invece che alla spesa di milioni di dollari da parte dell'azienda. Ma le due cose non erano incompatibili.

Fino al 2001, a capo dei laboratori di ricerca è stato Andrew Odlyzko. Originario della Polonia, Odlyzko conserva un accento dell'Europa orientale che è forte ma gradevole allo stesso tempo. Il periodo trascorso nel settore commerciale lo ha reso un ottimo comunicatore di idee matematiche difficili. Ha un atteggiamento accattivante, che non ti esclude ma anzi ti incoraggia a unirsi a lui nel suo viaggio matematico. Nondimeno è estremamente preciso e non abbandona mai il proprio ruolo di matematico provetto: ogni singolo passaggio non deve lasciare spazio ad ambiguità. L'interesse di Odlyzko per la funzione zeta era nato durante il suo dottorato al MIT, sotto la supervisione di Harold Stark. Uno dei problemi di cui si era dovuto occupare richiedeva la conoscenza quanto più precisa possibile della posizione dei primi zeri nel paesaggio zeta.

I calcoli di alta precisione sono proprio il genere di cosa che un computer fa molto meglio di un essere umano. Poco dopo

essere stato assunto nei Bell Laboratories dell'AT&T, Odlyzko ebbe la sua grande occasione. Nel 1978 i laboratori acquistarono il loro primo supercomputer, un Cray 1. Era il primo Cray a essere posseduto da un'impresa privata invece che dal governo o da un'università. Poiché l'AT&T era un'organizzazione commerciale, in cui la contabilità e i bilanci controllavano quasi tutto, ogni reparto doveva pagare le ore di utilizzo dei calcolatori *mainframe*. Tuttavia, dato che era necessario un po' di tempo perché le persone acquisissero la capacità di programmarlo, nei primi tempi il Cray veniva utilizzato pochissimo. Così la sezione informatica dell'azienda decise di destinare gratuitamente periodi di cinque ore di lavoro con il Cray a progetti scientifici validi che non godevano di finanziamenti.



Andrew Odlyzko, fino al 2001 responsabile dei laboratori di ricerca dell'AT&T.

L'opportunità di sfruttare la potenza del Cray era una tentazione troppo forte perché Odlyzko potesse resistervi. Si mise subito in contatto con i team di matematici che ad Amsterdam e in Australia avevano dimostrato che i primi trecento milioni di zeri cadevano sulla retta di Riemann. Qualcuno di loro aveva individuato la precisa posizione di quegli zeri lungo la retta magica? Nessuno l'aveva fatto. Entrambi i team si erano concentrati sulla dimostrazione del fatto che la coordinata est-ovest di ciascuno zero era uguale a $\frac{1}{2}$, così come aveva previsto Riemann. Non si erano preoccupati troppo dell'esatta ubicazione degli zeri lungo la direzione nord-sud.

Odlyzko fece domanda per utilizzare del tempo sul Cray allo scopo di determinare l'esatta ubicazione dei primi milioni di zeri. L'AT&T accolse la sua richiesta, e da decenni Odlyzko sfrutta tutto il tempo macchina che l'azienda può concedergli per calcolare le posizioni di un numero sempre maggiore di zeri. Questi calcoli non sono un mero esercizio di computazione fine a se stesso. Stark, il supervisore di Odlyzko al MIT, aveva applicato le conoscenze acquisite sulla posizione dei primissimi zeri nel paesaggio zeta per dimostrare una delle congetture di Gauss sul modo di fattorizzare certi insiemi di numeri immaginari. Odlyzko, d'altra parte, utilizzò l'individuazione precisa delle posizioni dei primi duemila zeri per dimostrare l'infondatezza di un'ipotesi che circolava negli ambienti matematici dall'inizio del XX secolo: la congettura di Mertens.

A Odlyzko si unì nella demolizione della congettura te

Riele, il matematico di Amsterdam che aveva contribuito a far perdere la scommessa a Zagier dimostrando che i primi trecento milioni di zeri cadevano sulla retta di Riemann. La congettura di Mertens è strettamente legata all'ipotesi di Riemann, e la dimostrazione della sua infondatezza fece capire ai matematici che se l'ipotesi di Riemann fosse stata vera, la sua validità rappresentava un caso estremamente particolare e limitato.

Il miglior modo per comprendere la congettura di Mertens è pensarla come una variante del lancio della moneta dei numeri primi. L'esito dell'N-esimo lancio della moneta di Mertens è «testa» se N è formato da un numero pari di numeri primi. Per esempio, quando $N = 15$ il risultato del lancio è testa, dato che 15 è il prodotto di due numeri primi (3 e 5). Se invece N è costituito da un numero dispari di numeri primi, per esempio $N = 105 = 3 \times 5 \times 7$, allora l'esito del lancio è «croce». Ma c'è una terza possibilità. Se per costruire N si usa un numero primo due volte, allora il risultato del lancio è nullo: 12, per esempio, è costituito dal prodotto di due 2 e di un 3 ($12 = 2 \times 2 \times 3$), e perciò il suo punteggio è zero. Potete pensare a un risultato nullo come all'equivalente di un lancio in cui la moneta viene persa di vista oppure rimane in bilico sul bordo. Mertens fece una congettura relativa al comportamento di questa moneta al crescere del valore di N. È una congettura molto simile all'ipotesi di Riemann, la quale afferma che la moneta dei numeri primi è una moneta equa. La congettura di Mertens, tuttavia, era un po' più forte rispetto alla predizione fatta da Riemann sui

numeri primi. Essa prediceva che l'errore sarebbe stato leggermente inferiore a quello che ci si dovrebbe aspettare da una moneta equa. Se la congettura fosse stata vera, allora lo sarebbe stata anche l'ipotesi di Riemann, ma non viceversa.

Nel 1897, a sostegno della sua congettura, Mertens aveva pubblicato delle tabelle di calcoli che comprendevano tutti i valori di N compresi fra 1 e 10.000. Negli anni Settanta i calcoli avevano portato i valori di N verificati sperimentalmente fino a un miliardo. Ma nella teoria dei numeri, come Littlewood aveva mostrato, miliardi di indizi sperimentali non valgono praticamente nulla. Nel frattempo cresceva lo scetticismo sulla possibilità che la congettura di Mertens fosse vera. Ci vollero però i calcoli compiuti da Odlyzko e te Riele sulle esatte ubicazioni dei primi duemila zeri della funzione zeta, calcoli precisi alla centesima cifra decimale, per riuscire finalmente a dimostrare che la congettura di Mertens era falsa. A ulteriore monito per coloro che si fanno impressionare dagli indizi numerici sperimentali, Odlyzko e te Riele stimarono che se anche Mertens avesse analizzato i lanci della sua moneta fino a un valore di N pari a 10^{30}, la sua congettura sarebbe comunque apparsa vera.

I computer utilizzati da Odlyzko alla AT&T continuano tuttora ad aiutare i matematici nei loro tentativi di dissotterrare i misteri dei numeri primi. Ma non è un traffico a senso unico. Oggi i numeri primi stanno dando il loro contributo all'espansione inarrestabile dell'era informatica. Negli anni Settanta i numeri primi divennero di colpo la chiave, in senso letterale, che permetteva di garantire la riservatezza delle

comunicazioni elettroniche. Hardy era sempre stato molto orgoglioso della totale inutilità della matematica, e della teoria dei numeri in particolare, nel mondo reale:

> La «vera» matematica dei «veri» matematici, quella di Fermat, di Eulero, di Gauss, di Abel e di Riemann, è quasi totalmente «inutile» (e questo vale sia per la matematica «applicata» sia per la matematica «pura»). Non è possibile giustificare la vita di nessun vero matematico professionista sulla base dell'«utilità» del suo lavoro.

Hardy non avrebbe potuto sbagliarsi di più. La matematica di Fermat, Gauss e Riemann era destinata a diventare uno strumento fondamentale per il mondo del commercio. È per questo che negli anni Ottanta e Novanta l'AT&T avrebbe reclutato un numero ancora maggiore di matematici. Oggi la sicurezza del villaggio elettronico dipende interamente dalla nostra comprensione dei numeri primi.

10

Scomporre numeri e decifrare codici

Se Gauss fosse vivo oggi, sarebbe un hacker.
Peter Sarnak, professore della Princeton University

Nel 1903 Frank Nelson Cole, professore di matematica alla Columbia University di New York, tenne una conferenza assai curiosa in occasione di un convegno della American Mathematical Society. Senza pronunciare una parola, Cole scrisse uno dei numeri di Mersenne su una lavagna. Sulla lavagna accanto scrisse due numeri più piccoli e li moltiplicò. In mezzo piazzò un segno di uguaglianza. Dopodiché si sedette.

$$2^{67} - 1 = 193.707.721 \times 761.838.257.287$$

Il pubblico si alzò in piedi ad applaudirlo, un'esplosione di entusiasmo a cui di rado capita di assistere in un locale pieno di matematici. Eppure moltiplicare due numeri non era così difficile, nemmeno per i matematici di inizio secolo. O no? Il fatto è che Cole aveva compiuto l'operazione oppo-

sta. Già dal 1876 si sapeva che $2^{67} - 1$, un numero di Mersenne composto da ventotto cifre, non era un numero primo bensì il prodotto di due numeri più piccoli. Tuttavia nessuno sapeva quali. A Cole occorsero tre anni di pomeriggi domenicali per «risolvere» quel numero nei due numeri primi che lo compongono.

Non fu solo il pubblico di Cole in quel lontano 1903 ad apprezzare la sua impresa. Nel 2000, un esoterico spettacolo off-Broadway intitolato *Il teorema delle cinque ragazze isteriche* rese omaggio a quel calcolo facendo risolvere a una delle ragazze il problema della fattorizzazione del numero di Cole. I numeri primi sono un tema ricorrente in questa commedia teatrale che racconta la gita al mare di una famiglia matematica. Il padre si duole per l'imminente raggiungimento della maggiore età della figlia, e non perché sarà abbastanza grande per potersene andare con il suo innamorato ma perché 17 è un numero primo, mentre 18 è divisibile per ben *quattro* altri numeri!

Più di duemila anni fa i matematici greci dimostrarono che ogni numero intero può essere scritto come prodotto di numeri primi. Da allora, un metodo rapido ed efficiente per individuare i numeri primi con cui si costruiscono gli altri numeri continua a eludere i matematici. Quello che ci manca è un equivalente matematico della spettroscopia, che permette ai chimici di stabilire quali elementi della tavola periodica sono i costituenti di una sostanza composta. La scoperta di un analogo matematico in grado di scomporre un numero intero nei numeri primi da cui è costituito frut-

terebbe al suo creatore qualcosa di più del semplice plauso accademico.

Nel 1903, il calcolo di Cole fu accolto come un'interessante curiosità matematica; la *standing ovation* che egli ricevette era il riconoscimento per lo straordinario impegno profuso in quel calcolo, ma certo nessuno pensava che la soluzione di quel problema avesse una sua intrinseca importanza. Oggi la fattorizzazione dei numeri – la loro scomposizione nei numeri primi da cui sono formati – non è più un passatempo per pomeriggi domenicali, ma sta al cuore delle moderne tecniche di decifrazione dei codici. I matematici hanno escogitato un modo per collegare il difficile problema della fattorizzazione ai codici che proteggono le finanze di tutto il mondo su Internet. Nel caso di numeri di cento cifre, il compito apparentemente innocente di individuarne i fattori primi è abbastanza arduo da persuadere le banche e il commercio elettronico ad affidare la sicurezza delle proprie transazioni finanziarie ai tempi incredibilmente lunghi che – al momento – esso richiede. Nel frattempo, questi nuovi codici matematici sono stati usati per risolvere un problema che assillava il mondo della crittografia.

La nascita della crittografia per Internet

Da quando siamo stati in grado di comunicare, abbiamo avuto la necessità di recapitare messaggi segreti. Per impedire che importanti informazioni cadessero in mani sbagliate, i

nostri progenitori escogitarono sistemi sempre più complessi con cui mascherare il contenuto di un messaggio. Uno dei più antichi metodi usati per nascondere messaggi fu ideato dall'esercito di Sparta più di duemilacinquecento anni fa. Il mittente e il destinatario dei messaggi possedevano entrambi una scitale, un sottile cilindro di legno di dimensioni perfettamente identiche. Per cifrare un messaggio, per prima cosa il mittente avvolgeva a spirale attorno al cilindro una sottile striscia di pergamena. Quindi scriveva il messaggio sulla pergamena seguendo la lunghezza della scitale. Una volta che la pergamena era stata srotolata, il testo del messaggio appariva privo di senso. Riacquistava la sua forma compiuta solo quando la pergamena veniva riavvolta attorno alla scitale gemella posseduta dal destinatario. Da allora, le generazioni che si sono succedute hanno inventato metodi crittografici sempre più sofisticati. L'ultimo e più raffinato congegno meccanico per la cifratura di messaggi fu Enigma, la macchina usata dalle forze armate tedesche nel corso della Seconda guerra mondiale.

Prima del 1977, chiunque volesse inviare un messaggio segreto si trovava di fronte a un problema sostanziale. Prima che il messaggio fosse trasmesso, mittente e destinatario dovevano incontrarsi per decidere quale cifra – quale metodo di codifica – adottare. I generali spartani, per esempio, avevano la necessità di accordarsi sulle dimensioni della scitale. Persino con la produzione in serie della macchina Enigma, Berlino era obbligata a mandare degli agenti che consegnassero ai capitani degli U-Boot e ai comandanti dei reparti

meccanizzati i libri con la descrizione dettagliata delle regolazioni da apportare giornalmente alla macchina per poter codificare i messaggi da inviare e decodificare quelli ricevuti. Naturalmente, se il nemico avesse messo le mani sul libro dei codici, tutto sarebbe stato perduto.

Immaginate le difficoltà logistiche che sorgerebbero se si dovesse usare un sistema di crittografia di questo genere per fare acquisti su Internet. Prima che noi possiamo inviare in sicurezza le nostre informazioni bancarie, le aziende che gestiscono i siti da cui intendiamo fare acquisti dovrebbero inviarci delle lettere protette per spiegarci come codificare le informazioni. Dato l'enorme traffico di Internet, ci sarebbero altissime probabilità che molte di quelle lettere finiscano per essere intercettate. All'alba dell'era delle comunicazioni rapide e globali, era assolutamente indispensabile sviluppare un sistema crittografico adatto alla bisogna. E proprio come durante la guerra erano stati i matematici di Bletchley Park a decifrare Enigma, sarebbero stati dei matematici a creare una nuova generazione di codici che ha fatto uscire la crittografia dai romanzi di spionaggio per introdurli nel villaggio globale. Questi codici matematici hanno favorito la nascita di quella che è oggi nota come *crittografia a chiave pubblica.*

Pensate alla codificazione e alla decodificazione di un messaggio come all'apertura e alla chiusura di una porta con una chiave. Nel caso di una porta convenzionale si usa la stessa chiave per chiuderla e per aprirla. Analogamente, nel caso della macchina Enigma, la configurazione utilizzata per cifrare un messaggio è identica alla configurazione utilizzata

per decifrarlo. La configurazione – chiamiamola la *chiave* – deve essere tenuta segreta. Tanto più lontano è il destinatario dal mittente, quanto più diventa difficile dal punto di vista logistico recapitare la chiave da utilizzare per cifrare e decifrare il messaggio. Supponete che il capo di un'organizzazione spionistica voglia ricevere dei rapporti riservati da un certo numero di agenti attivi sul campo, ma non voglia che essi leggano i rapporti inviati dai colleghi. In questo caso sarebbe costretto a inviare una chiave diversa a ciascun agente. Adesso sostituite alcuni agenti segreti con milioni di persone ansiose di acquistare merci su Internet. Un'operazione di queste dimensioni, pur non essendo impossibile in teoria, è un incubo logistico. Tanto per cominciare, un potenziale acquirente che visitasse un sito web non potrebbe piazzare subito un ordine, ma dovrebbe aspettare di ricevere una chiave di codifica sicura. Il World Wide Web, la rete informatica mondiale, si trasformerebbe in un World Wide Wait, un'attesa informatica mondiale.

Il sistema della crittografia a chiave pubblica è come una porta con due chiavi distinte: la chiave A chiude la porta, ma è una chiave differente, la B, ad aprirla. Di colpo scompare la necessità di mantenere il segreto sulla chiave A. Il possesso di questa chiave non compromette la sicurezza. Adesso immaginate che questa porta sia situata all'ingresso dell'area protetta del sito web di un'azienda. L'azienda può distribuire liberamente la chiave A a ogni visitatore che voglia inviare un messaggio sicuro, come per esempio il numero della sua carta di credito. Anche se tutti stanno usando la stessa chia-

ve per codificare i propri messaggi – cioè per chiudere la porta e mettere al sicuro la loro informazione segreta – nessuno potrà leggere il messaggio codificato degli altri. Di fatto, una volta che i dati sono stati codificati, gli utenti non sono in grado di leggerli, nemmeno se quei dati sono i propri. Solo l'azienda che gestisce il sito possiede la chiave B, che le permette di aprire la porta e di leggere i numeri delle carte di credito.

La crittografia a chiave pubblica fu proposta pubblicamente per la prima volta nel 1976, in un autorevole articolo scientifico scritto da due matematici della Stanford University, in California: Whit Diffie e Martin Hellman. Questo duo fece nascere un movimento alternativo nel mondo della crittografia, un movimento che avrebbe sfidato il monopolio delle agenzie governative sulla sicurezza dei dati. Diffie, in particolare, era il prototipo del figlio degli anni Sessanta, del capellone che si ribella al sistema. Sia lui sia Hellman erano profondamente convinti del fatto che la crittografia non dovesse rimanere proprietà esclusiva del governo. Parecchio tempo dopo, trapelò la notizia che un sistema crittografico analogo era stato proposto da alcune agenzie governative per la sicurezza, ma invece di essere pubblicata su una rivista scientifica la proposta era stata nascosta da qualche parte con stampigliata sopra la scritta «Top Secret».

L'articolo del gruppo della Stanford, intitolato *New directions in cryptography*, annunciava una nuova era nel campo della crittografia e della sicurezza elettronica. La cifratura a chiave pubblica, con le sue due chiavi, sembrava una grande

innovazione, almeno in teoria. Ma era possibile mettere quella teoria in pratica e creare un codice che funzionasse secondo quei principi? Dopo alcuni anni di tentativi infruttuosi, alcuni crittografi cominciavano a dubitare che una chiave di quel tipo fosse realizzabile. Temevano che nel mondo reale dello spionaggio quella chiave accademica non avrebbe mai potuto farcela.

RSA, il trio del MIT

Ron Rivest del Massachusetts Institute of Technology fu uno dei tanti che furono ispirati dall'articolo di Diffie e Hellman. Rivest, in contrasto con lo stile ribelle di Diffie e Hellman, è un uomo che segue le convenzioni. È riservato, parla con voce pacata e reagisce con misura al mondo intorno a lui. Nel periodo in cui lesse *New directions in cryptography*, la sua ambizione era quella di entrare a far parte dell'establishment accademico. I suoi sogni erano popolati di cattedre universitarie e di teoremi, non certo di spie e di codici segreti. Non immaginava nemmeno lontanamente che la lettura di quell'articolo sarebbe stato l'inizio di un viaggio che l'avrebbe portato a ideare uno dei sistemi crittografici più potenti e di maggior successo commerciale mai creati.

Rivest era entrato nel dipartimento di informatica del MIT nel 1974, dopo essere stato ricercatore alla Stanford University e a Parigi. Come Turing, si interessava all'interazione fra teoria astratta e macchine reali. Alla Stanford aveva

passato un certo tempo a costruire robot intelligenti, ma ora stava rivolgendo la propria attenzione agli aspetti più teorici delle scienze informatiche.

Al tempo di Turing, la questione più importante nell'ambito del calcolo automatico, ispirata dal secondo e dal decimo problema di Hilbert, era l'esistenza teorica di programmi in grado di risolvere certi tipi di problemi. Come Turing aveva mostrato, nessun programma sarebbe mai stato in grado di stabilire quali verità matematiche fossero dimostrabili. Negli anni Settanta un'altra questione teorica furoreggiava nei dipartimenti universitari di scienze informatiche. Supponete che esista effettivamente un programma in grado di risolvere uno specifico problema. È possibile analizzare quanto tempo impiegherà quel programma a risolvere il problema. Ovviamente la questione assumeva una grande importanza se il programma era destinato a girare su un vero computer. Era una questione che richiedeva un'analisi altamente teorica, ma che nondimeno era profondamente radicata nel mondo reale. Ed era proprio questa combinazione di teoria e pratica a rendere quella sfida perfetta per Rivest. Egli lasciò i suoi robot alla Stanford e si trasferì al MIT per dedicarsi a una disciplina in rapida crescita: la complessità computazionale.

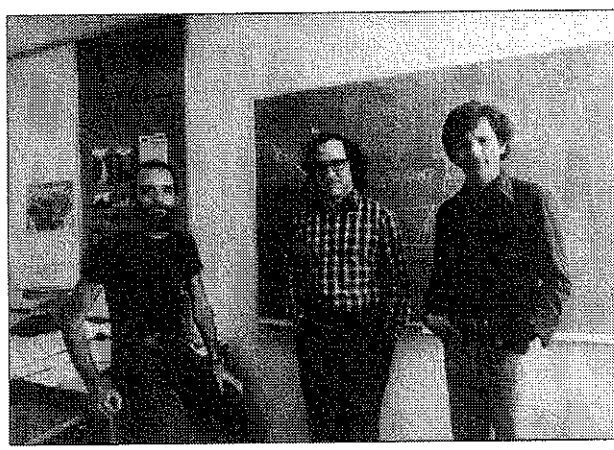
«Un giorno un dottorando mi passò questo articolo dicendomi: "Forse la potrebbe interessare"» ricorda Rivest. Era l'articolo di Diffie e Hellman, e Rivest ne fu immediatamente catturato. «Presentava una visione generale di ciò che era la crittografia e di ciò che avrebbe potuto essere. Se solo si

fosse riusciti a concepire un'idea precisa.» La sfida posta dall'articolo riuniva in sé tutti gli interessi di Rivest: informatica, logica e matematica. Era un problema che aveva evidenti implicazioni pratiche per il mondo reale ma che nel contempo si ricollegava in maniera diretta alle questioni teoriche che tanto stavano a cuore a Rivest. «Ciò che interessa in crittografia è distinguere fra i problemi che sono facili e i problemi che sono difficili» spiega Rivest. «E questo era esattamente ciò di cui si occupava l'informatica.» Se si voleva un codice che fosse difficile da decifrare, era necessario realizzarlo in base a un problema la cui soluzione fosse difficile da calcolare.

Per dare inizio ai suoi tentativi di costruire un sistema di crittografia a chiave pubblica, Rivest si mise a saccheggiare la gran quantità di problemi che, sapeva, avrebbero richiesto molto tempo per essere risolti dai computer. Aveva anche bisogno di qualcuno a cui sottoporre le proprie idee. In quegli anni il MIT cominciava già a rompere gli schemi di un'università tradizionale, allentando i confini fra dipartimenti nella speranza di incoraggiare i rapporti interdisciplinari. Rivest, che era uno scienziato informatico, divideva lo stesso piano con alcuni membri del dipartimento di matematica. E gli uffici vicini al suo erano occupati proprio da due matematici: Leonard Adleman e Adi Shamir.

Adleman aveva un carattere più aperto rispetto a Rivest, ma rimaneva un tipico accademico con idee folli e meravigliose su cose che non sembravano avere nulla a che fare con la realtà. Adleman ricorda la mattina in cui entrò nell'ufficio

di Rivest: «Ron se ne stava lì seduto con quel manoscritto. "Hai visto questa roba della Stanford? Crittogrammi, codici segreti, sistemi antintercettazione, bla bla bla...". La mia reazione fu: "Beh, sembra tutto molto carino, Ron, però io devo parlarti di cose serie. Non me ne potrebbe importare di meno". Ma Ron finì per interessarsene molto». Ad Adleman interessava il mondo astratto di Gauss ed Eulero. Quello che gli importava era decifrare l'ultimo teorema di Fermat, non occuparsi di un argomento alla moda come la crittografia.



Adi Shamir, Ron Rivest e Leonard Adleman.

Rivest trovò orecchie più ricettive in un altro ufficio dello stesso corridoio, quello occupato da Adi Shamir, un matematico israeliano in visita al MIT. Insieme, Shamir e Rivest si misero alla ricerca di un'idea che si potesse usare per tra-

durre in qualcosa di reale il sogno di Diffie e Hellman. Benché Adleman non fosse troppo interessato, era difficile ignorare l'ossessione di Rivest e Shamir per quel problema. «Ogni volta che andavo nei loro uffici, erano lì a parlarne. La gran parte dei sistemi che escogitavano facevano pietà, e dato che ero lì, intervenivo nelle loro discussioni per vedere se quello che proponevano quel giorno avesse un senso.»

Mentre esploravano il ventaglio dei problemi matematici «duri», per i loro sistemi crittografici in stato embrionale cominciarono a utilizzare un numero maggiore di idee tratte dalla teoria dei numeri. Questo rientrava proprio nella sfera di interessi di Adleman: «Poiché era la mia area di competenza, potevo rendermi più utile nell'analisi dei loro sistemi, ed eliminarli quasi tutti». Pensò di aver trovato pane per i propri denti quando Rivest e Shamir proposero un sistema che sembrava molto sicuro. Ma dopo una notte insonne in cui passò in rassegna tutta la teoria dei numeri che conosceva, riuscì a trovare il modo di decifrare anche quel loro ultimo codice. «La cosa proseguì a lungo. Se andavamo a sciare, durante il viaggio era di quello che parlavamo [...] Persino nell'ovovia che ci portava sulle piste non smettevamo di parlarne...»

La svolta ci fu una sera in cui tutti e tre erano stati invitati a cenare a casa di un laureato che celebrava la prima notte della Pasqua ebraica. Adleman è astemio, ma ricorda che Rivest tracannò giudiziosamente il vino prescritto per il Seder. Adleman tornò a casa a mezzanotte. Poco dopo squillò il telefono. Era Rivest. «Ho avuto un'altra idea...» Adleman ascoltò con attenzione. «Ron, penso che stavolta ci sei. Que-

sta mi sembra proprio l'idea giusta.» Per un certo periodo avevano preso in considerazione il difficile problema della fattorizzazione dei numeri. Non esistevano progetti interessanti di programmi in grado di scomporre i numeri interi nei numeri primi da cui sono formati. Quel problema aveva il sapore giusto. Sotto l'effetto del vino rituale del Seder, Rivest aveva capito come lo si sarebbe potuto tradurre nel suo nuovo codice. Rivest ricorda: «Di primo acchito dava ottime sensazioni. Ma sapevamo per esperienza che le cose che inizialmente sembrano convincenti possono sempre andare a finire in nulla. Perciò lo accantonai fino al mattino».

Quando Adleman arrivò al dipartimento del MIT nella tarda mattinata del giorno seguente, Rivest lo salutò mostrandogli la bozza scritta a mano di un articolo che si apriva con i nomi Adleman, Rivest e Shamir in bella evidenza. Mentre lo leggeva, Adleman si rese conto che conteneva ciò che Rivest gli aveva detto la notte prima al telefono. «Così dissi a Ron: "Togli il mio nome. Questa è roba tua". E così ci mettemmo a litigare sull'opportunità che il mio nome rimanesse nell'articolo oppure no.» Adleman accettò di pensarci su. A quel tempo non credeva che fosse una questione importante, dato che presumibilmente l'articolo sarebbe stato il meno letto di tutte le sue pubblicazioni. Ma poi si ricordò del sistema di crittografia che lo aveva tenuto sveglio una notte intera. In quell'occasione aveva evitato che Rivest e Shamir facessero una figuraccia pubblicando frettolosamente un codice poco sicuro. «Perciò tornai da Ron. "Mettimi come terzo della lista." Fu così che nacque la sigla RSA.»

Rivest decise che avrebbero fatto meglio a scoprire quanto fosse effettivamente difficile la fattorizzazione dei numeri. «Il problema della fattorizzazione era una forma d'arte oscura a quel tempo. La letteratura al riguardo era scarsa. Era difficile ottenere delle buone stime del tempo che ci avrebbero impiegato gli algoritmi che erano già stati sviluppati.» Una persona che ne sapeva più di quasi tutti gli altri era Martin Gardner, uno dei più grandi divulgatori di matematica al mondo. Gardner fu incuriosito dal metodo proposto da Rivest e gli chiese il permesso di pubblicare un articolo dedicato a quell'idea nella rubrica fissa che teneva su «Scientific American».

La reazione all'articolo di Gardner convinse finalmente Adleman che avevano scoperto qualcosa di grosso:

> Quell'estate mi trovavo in una libreria di Berkeley. Un cliente e l'uomo dietro il bancone stanno discutendo di qualcosa e il cliente dice: «Ha visto quella roba sulla crittografia in "Scientific American"?». Così intervengo: «Ehi, io sono stato coinvolto in quella roba». E il tizio si gira verso di me e mi dice: «Posso avere il suo autografo?». Quante volte ci viene chiesto l'autografo? Zero. Wow, che cos'è... mi sa che qui sta succedendo davvero qualcosa!

Nel suo articolo Gardner aveva scritto che i tre matematici avrebbero mandato un preprint del loro articolo a chiunque avesse spedito una busta affrancata. «Quando torno al MIT ci sono migliaia, letteralmente migliaia, di queste buste

da tutto il mondo, compresa una del servizio di sicurezza nazionale bulgaro e bla bla bla.»

I tre cominciarono a sentirsi dire che stavano per diventare ricchi. Anche negli anni Settanta, quando il commercio elettronico era pura fantasia, la gente si rendeva conto delle potenzialità di quelle idee. Adleman pensava che i soldi sarebbero cominciati ad affluire entro pochi mesi, e andò diritto a comprasi una piccola granturismo rossa per festeggiare. Bombieri non era l'unico matematico che ambiva a un'auto sportiva come premio per i propri successi.

Alla fine Adleman dovette finire di pagare l'auto a rate, attingendo allo stipendio regolare che prendeva al MIT. Ci volle un po' più di tempo perché i servizi di sicurezza e il mondo degli affari si rendessero pienamente conto dell'affidabilità e della potenza della cifratura RSA. Mentre Adleman se ne andava in giro sulla sua granturismo pensando ancora a Fermat, era Rivest a essersi già sintonizzato sulle possibili implicazioni della loro proposta per il mondo reale:

> Pensavamo che il progetto potesse avere delle potenzialità economiche. Perciò passammo dall'ufficio brevetti del MIT e poi provammo a vedere se per caso non ci fosse qualche compagnia a cui interessasse commercializzare il prodotto. Ma non esisteva ancora un mercato nei primi anni Ottanta. L'interesse era molto scarso in quella fase. Il mondo non era ancora collegato in una grande rete. La gente non aveva il computer sulla scrivania.

A essere interessati erano, ovviamente, i servizi di sicurezza governativi. «I servizi di sicurezza cominciavano a essere molto preoccupati per lo sviluppo di tutta quella tecnologia» spiega Rivest. «Facevano del loro meglio per capire se il sistema che proponevamo non stesse correndo troppo veloce.» Sembra che la stessa idea fosse già stata suggerita in gran segreto nell'ambiente dell'intelligence. Ma i servizi di sicurezza nutrivano molti dubbi sull'opportunità di affidare la vita dei loro agenti nella mani di alcuni matematici convinti che scomporre i numeri fosse difficile. Ansgar Heuser dei servizi di sicurezza tedeschi, la BSI, ricorda che negli anni Ottanta loro stessi presero in considerazione la possibilità di usare il sistema RSA sul campo. Chiesero ai matematici se l'Occidente fosse più forte dei russi in teoria dei numeri. Quando ricevettero un chiaro «no» in risposta, accantonarono l'idea. Nel decennio seguente, tuttavia, l'RSA avrebbe dimostrato il proprio valore non solo nella protezione della vita delle spie ma anche nel mondo pubblico degli affari.

Un trucco di carte crittografico

Oggi la cifratura RSA salvaguarda gran parte delle transazioni che avvengono su Internet. La cosa straordinaria è che la matematica che rende possibile questo sistema di crittografia a chiave pubblica si rifà ai calcolatori a orologio di Gauss e a un teorema dimostrato da Pierre de Fermat, uno degli eroi di Adleman: il piccolo teorema di Fermat.

La somma sui calcolatori a orologio di Gauss è un'operazione a tutti noi familiare: la facciamo quando calcoliamo il tempo con un normale orologio con dodici ore sul quadrante. Sappiamo che quattro ore dopo le nove sarà l'una. È questo il principio dell'addizione sul calcolatore a orologio: si sommano i numeri e si ricava il resto dopo aver diviso il risultato per dodici. Per esprimere questo fatto, utilizziamo esattamente la stessa notazione che Gauss introdusse circa duecento anni fa:

$4 + 9 = 1$ (modulo 12)

La moltiplicazione o l'elevamento a potenza di un numero su un calcolatore a orologio di Gauss funzionano in modo simile: si calcola il risultato su un calcolatore convenzionale, lo si divide per dodici e si prende il resto della divisione.

Gauss aveva capito che non era necessario attenersi ai normali orologi con dodici ore sul quadrante. Ancor prima che egli formulasse esplicitamente il suo concetto di aritmetica dell'orologio, Fermat aveva compiuto una scoperta fondamentale, il suo cosiddetto piccolo teorema, in cui si considerava un calcolatore a orologio con un numero *primo* di ore, chiamiamolo p, sul quadrante. Se si prende un numero su questo calcolatore e lo si eleva alla potenza p, si ottiene sempre il numero da cui si è partiti. Per esempio, se su un calcolatore a orologio con 5 ore sul quadrante moltiplichiamo 2 per se stesso 5 volte, otteniamo 32, a cui corrisponde di nuovo 2 sull'orologio con 5 ore. Ogni volta che Fermat

moltiplicava il risultato precedente per 2, la lancetta dell'orologio sembrava tracciare un andamento ripetitivo. Dopo cinque passi la lancetta ritornava alla posizione di partenza, pronta a ripetere la sequenza.

Potenze di 2	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
Su un calcolatore convenzionale	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1.024
Su un calcolatore a orologio di 5 ore	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4

Se prendiamo un orologio con tredici ore sul quadrante e ripetiamo il procedimento con le potenze di 3, da 3^1, 3^2, ... fino a 3^{13}, otteniamo

3, 9, 1, 3, 9, 1, 3, 9, 1, 3, 9, 1, 3

Questa volta la lancetta non si ferma su tutte le ore del quadrante dell'orologio, ma produce comunque un andamento ripetitivo che la riporta sulle 3 dopo che 3 è stato moltiplicato per se stesso 13 volte. Sembrava che, indipendentemente dal valore scelto da Fermat per il numero primo p, si verificasse la stessa magia. Fermat aveva scoperto che, nella notazione usata da Gauss per l'aritmetica dell'orologio (o aritmetica modulare), per ogni numero primo p e per ogni valore x sull'orologio con p ore sul quadrante risultava

$x^p = x$ (modulo p)

La scoperta di Fermat è il genere di cosa che fa battere forte il cuore dei matematici. Che cosa c'è nei numeri primi che produce questo tipo di magia? Non accontentandosi delle osservazioni sperimentali, Fermat voleva trovare una dimostrazione del fatto che, qualsiasi fosse il numero primo di ore scelto per il suo orologio, i numeri primi non l'avrebbero mai piantato in asso.

Fu in una lettera scritta nel 1640 a un amico, Bernard Frenicle de Bessy, invece che sui margini di un libro, che Fermat dichiarò di aver trovato una dimostrazione. Ma come nel caso del suo ultimo teorema, quella dimostrazione era troppo lunga per essere scritta per esteso nello spazio disponibile. Sebbene avesse promesso di mandarla a Bessy, Fermat non rivelò mai la dimostrazione al mondo. Si sarebbe dovuto attendere un altro secolo perché fosse riscoperta. Nel 1736 Leonardo Eulero scoprì perché sugli orologi a numeri primi di Fermat la lancetta ritornava sempre al punto di partenza dopo che l'ora era stata moltiplicata per se stessa un numero primo di volte. Eulero riuscì anche a estendere la scoperta di Fermat agli orologi con N ore sul quadrante, dove $N = p \times q$ è il prodotto dei due numeri primi p e q. Eulero scoprì che su un orologio siffatto l'andamento avrebbe cominciato a ripetersi dopo $(p-1) \times (q-1) + 1$ passaggi.

Furono la scoperta compiuta da Fermat della magia degli orologi a numeri primi e la generalizzazione di Eulero ad attraversare in un lampo la mente di Rivest mentre se ne stava seduto a pensare, la notte dopo quella fatale cena del Seder. Rivest capì che poteva utilizzare il piccolo teorema di Fermat

come la chiave per realizzare un codice matematico in grado di far sparire il numero di una carta di credito per poi farlo riapparire magicamente. Cifrare un numero di carta di credito ricorda l'inizio di un trucco con le carte. Ma qui non c'è un mazzo normale: il numero di carte del mazzo di Rivest è così incredibilmente enorme che sono necessarie più di cento cifre per scriverlo. Il numero della carta di credito del cliente è una delle carte da gioco di questo mazzo. Il cliente sistema la sua carta di credito in cima al mazzo. Il sito web mescola il mazzo, di modo che l'ubicazione della carta del cliente sembra andare completamente perduta. Un hacker si trova ad affrontare il compito impossibile di estrarre quella singola carta dal mazzo mescolato. Il sito web, tuttavia, conosce un trucco ingegnoso. Grazie al piccolo teorema di Fermat, è in grado di far riapparire la carta sulla cima del mazzo dopo un'altra rimescolata. Questa seconda sequenza di scozzate è la chiave segreta nota soltanto all'azienda a cui appartiene il sito.

La matematica utilizzata da Rivest per ideare questo trucco crittografico è decisamente semplice. Il mescolamento delle carte avviene per mezzo di un calcolo matematico. Quando un cliente piazza un ordine sul sito, il computer prende il suo numero di carta di credito e su di esso esegue un calcolo. Tale calcolo è facile da fare, ma quasi impossibile da disfare se non si conosce la chiave segreta. Questo perché il calcolo non viene compiuto su un calcolatore convenzionale ma su uno dei calcolatori a orologio di Gauss.

Quando un cliente piazza un ordine sul sito di un'azien-

da, l'azienda gli comunica quante ore usare sul calcolatore a orologio. Per scegliere questo numero di ore, l'azienda prende due grandi numeri primi, p e q, ciascuno composto da 60 cifre circa. Quindi li moltiplica per ottenere un terzo numero, $N = p \times q$. Il numero di ore dell'orologio risulterà perciò enorme, fino a un massimo di 120 cifre. Ogni cliente userà lo stesso orologio per cifrare il proprio numero di carta di credito. Grazie alla sicurezza di questo codice, l'azienda può utilizzare lo stesso orologio per mesi prima di dover considerare l'opportunità di cambiare il numero di ore sul suo quadrante.

La selezione del numero di ore sul quadrante del calcolatore a orologio del sito web è il primo passo nella scelta di una chiave pubblica. Nonostante il numero N sia reso pubblico, i due numeri primi p e q che lo compongono sono segreti. Questi numeri sono i due ingredienti della chiave che viene usata per decodificare il numero cifrato della carta di credito.

Dopodiché ogni cliente riceve un secondo numero, E, chiamato il numero di codifica. Questo numero è lo stesso per tutti ed è pubblico, proprio come lo è N, il numero di ore sul quadrante del calcolatore a orologio. Per cifrare il proprio numero di carta di credito C, il cliente lo eleva alla potenza E sul calcolatore a orologio reso pubblico dal sito web. (Immaginate che E sia il numero di scozzate che un prestigiatore esegue per nascondere nel mazzo la carta da gioco da voi scelta.) Il risultato, nella notazione di Gauss, è C^E (modulo N).

Che cosa rende questa procedura tanto sicura? Dopo tut-

to, qualsiasi hacker può vedere il numero cifrato della carta di credito mentre viaggia nel cyberspazio, e può cercare la chiave pubblica dell'azienda, ovvero il calcolatore a orologio con N ore e l'istruzione di elevare il numero di carta di credito alla E. Tutto quello che l'hacker deve fare per decifrare questo codice è trovare un numero che, moltiplicato E volte per se stesso sul calcolatore a orologio di N ore, fornisce il numero cifrato della carta di credito. Ma questo è molto difficile. Un'ulteriore complicazione deriva dal modo in cui vengono calcolate le potenze su un calcolatore a orologio. Su un calcolatore convenzionale il risultato dell'operazione aumenta costantemente a ogni nuova moltiplicazione del numero della carta di credito per se stesso. Lo stesso non accade sul calcolatore a orologio. Qui, il punto di partenza si perde di vista molto rapidamente, dato che le dimensioni del risultato non hanno alcun rapporto con la posizione da cui si è partiti. Dopo che il mazzo di carte è stato mescolato E volte, l'hacker è completamente perso.

E se l'hacker provasse a passare in rassegna ogni possibile ora sul calcolatore a orologio? Niente da fare. Oggi i crittografi usano orologi sui quali N, il numero di ore, ha più di cento cifre. In altre parole, ci sono più ore sul quadrante del calcolatore a orologio che atomi nell'universo. (Al contrario, il numero di codifica E è in genere piuttosto piccolo.) Ma se risolvere questo problema è impossibile, come fa l'azienda a recuperare il numero di carta di credito del cliente?

Rivest sapeva che il piccolo teorema di Fermat garantiva l'esistenza di un magico numero di decodifica, D. Quando

l'azienda che opera su Internet moltiplica il numero cifrato della carta di credito per se stesso D volte, il numero originale della carta di credito riappare. I prestigiatori usano la stessa idea per recuperare la carta nascosta in un mazzo. Dopo un certo numero di scozzate, si ha l'impressione che l'ordine delle carte sia completamente casuale, ma il prestigiatore sa che poche altre scozzate riporteranno il mazzo alla sua configurazione originale. Per esempio, nel caso della cosiddetta scozzata perfetta – in cui si divide il mazzo in due parti uguali e poi si mescolano le due metà in modo da alternare a ciascuna carta di una metà una carta dell'altra metà – ci vogliono otto scozzate per riportare il mazzo nella configurazione di partenza. Naturalmente l'abilità del prestigiatore sta nell'effettuare otto scozzate perfette di fila. Fermat aveva scoperto una procedura analoga per gli orologi, ovvero l'equivalente del numero di scozzate perfette necessarie per riportare un mazzo di 52 carte da gioco nella configurazione originaria. Ed era il trucco di Fermat che Rivest aveva adottato per decodificare i messaggi cifrati con il sistema RSA.

Anche se il mazzo di carte è stato mescolato dal sito web un numero di volte sufficiente a rendere introvabile il numero della vostra carta di credito, l'azienda che gestisce il sito sa che mescolandolo altre D volte farà ricomparire la vostra carta in cima al mazzo. Ma voi potete risalire al valore di D solo se conoscete i numeri primi segreti p e q. Rivest usò la generalizzazione del piccolo teorema di Fermat scoperta da Eulero, che funziona su calcolatori a orologio costituiti da due numeri primi invece che da uno solo. Eulero aveva di-

mostrato che su uno di tali orologi l'andamento si ripete dopo $(p-1) \times (q-1) + 1$ scozzate. Perciò il solo modo per sapere quanto bisognerà aspettare per vedere la sequenza ricominciare su un orologio con $N = p \times q$ ore sul quadrante è conoscere i valori di entrambi i numeri primi p e q. La conoscenza di questi due numeri primi diventa dunque la chiave per accedere ai segreti della cifratura RSA. Il numero delle scozzate richieste per recuperare il numero perduto della carta di credito è noto solo all'azienda che opera su Internet, che ha mantenuto un'assoluta segretezza sul valore dei numeri primi p e q.

Tuttavia, sebbene i due numeri p e q siano stati tenuti segreti, il loro prodotto, $N = p \times q$, è stato reso pubblico. La sicurezza della cifratura RSA di Rivest si basa perciò sulla difficoltà di fattorizzare N. Un hacker si trova ad affrontare lo stesso problema che teneva occupato il professor Cole all'inizio del secolo scorso: trovare i due numeri primi con cui si costruisce il numero N.

Il guanto della sfida di RSA 129 è lanciato

Per convincere il mondo degli affari che il problema della fattorizzazione aveva un retaggio rispettabile, i tre del MIT usavano citare ciò che uno dei pezzi da novanta, Gauss, diceva al riguardo: «La dignità stessa della scienza sembra richiedere che si utilizzi ogni mezzo possibile per trovare la soluzione a un problema così elegante e così celebrato». Ma ben-

ché riconoscesse l'importanza del problema della fattorizzazione, Gauss non aveva compiuto alcun progresso sulla strada di una sua soluzione. E se Gauss aveva tentato di venirne a capo senza riuscirci, non ci potevano essere dubbi sul fatto che nella mani della cifratura RSA la sicurezza delle aziende sarebbe stata ben tutelata.

A dispetto dell'«approvazione» data da Gauss al sistema RSA, prima che i tre del MIT lo traducessero nella loro nuova cifratura il problema di fattorizzare grandi numeri primi era rimasto ai margini della matematica. Buona parte dei matematici mostrava ben poco interesse per il compitino pratico di scomporre i numeri interi. Anche se ci fosse voluto un tempo pari all'età dell'universo per trovare i numeri primi da cui sono composti dei gradi numeri, che importanza teorica poteva mai avere questo fatto? Ma con la scoperta di Rivest, Shamir e Adleman il problema della fattorizzazione assumeva un'importanza ben superiore a quella che aveva avuto al tempo di Cole.

Quant'è difficile, dunque, scomporre un numero nei primi che lo costituiscono? Cole non aveva accesso ai computer elettronici, e per questo gli ci erano volute parecchie domeniche prima di riuscire a scoprire che 193.707.721 e 761.838.257.287 erano i due numeri primi che moltiplicati davano come risultato il numero di Mersenne $2^{67} - 1$. Ma noi, armati dei nostri computer, non possiamo semplicemente controllare un numero primo dopo l'altro finché non ne troviamo uno che divide il numero che stiamo cercando di fattorizzare? Il problema è che fattorizzare un numero di

più di cento cifre significa dover controllare più numeri di quante siano le particelle nell'universo osservabile.

Con così tanti numeri da controllare, Rivest, Shamir e Adleman si sentivano sufficientemente fiduciosi per lanciare una sfida: fattorizzare un numero di 129 cifre che loro stessi avevano costruito moltiplicando due numeri primi. Il numero, insieme a un messaggio cifrato, venne pubblicato nell'articolo di Martin Gardner su «Scientific American» che aveva portato il codice all'attenzione del mondo. Non essendo ancora i milionari che sarebbero diventati, i tre offrirono solo cento dollari come premio per chi avesse scoperto i due primi usati per costruire quel numero enorme, battezzato «RSA 129». Nell'articolo essi stimavano che ci sarebbero voluti quaranta quadrilioni di anni per scomporre RSA 129. Poco dopo si resero conto di aver fatto un piccolo errore aritmetico nella stima del tempo necessario. Tuttavia, considerate le tecniche di fattorizzazione disponibili all'epoca, ci sarebbero voluti comunque migliaia di anni.

La cifratura RSA sembrava la realizzazione del sogno dei costruttori di codici segreti: una codice assolutamente sicuro. Con tanti numeri primi da verificare, quella fiducia nell'inespugnabilità del sistema appariva giustificata. Ma anche i tedeschi avevano creduto che Enigma fosse invincibile, dato che le sue possibili configurazioni erano più numerose delle stelle nell'universo. E tuttavia i matematici di Bletchley Park avevano mostrato che non si può sempre riporre la propria fiducia nei grandi numeri.

Il guanto della sfida di RSA 129 era stato gettato. Mai di-

sposti a lasciar cadere una sfida, matematici di tutto il mondo cominciarono a darsi da fare. Negli anni che seguirono questi matematici escogitarono sistemi sempre più ingegnosi per individuare i due numeri primi segreti di Rivest, Shamir e Adleman. Invece che nei quaranta quadrilioni di anni stimati dal trio del MIT, alla fine i numeri furono individuati nel tempo irrisorio di diciassette anni. Questo è un periodo ancora più che sufficiente perché una carta di credito crittografata utilizzando RSA 129 scada. Nondimeno, pone la questione di quanto tempo passerà prima che emerga un matematico portando delle idee in grado di ridurre quei diciassette anni in diciassette minuti.

Nuovi trucchi in arrivo

L'interazione fra crittografia e matematica introdusse i matematici moderni a una nuova cultura, più vicina alle scienze sperimentali. Era una cultura di cui non si faceva esperienza da quando il sistema scolastico tedesco del XIX secolo aveva strappato il testimone ai matematici della Francia rivoluzionaria. I matematici francesi avevano considerato la loro disciplina uno strumento pratico, un mezzo per raggiungere uno scopo, mentre Wilhelm von Humboldt credeva nel perseguimento della conoscenza fine a se stessa. I teorici ancora imbevuti della tradizione tedesca non ci misero molto a condannare lo studio dei metodi per fattorizzare i numeri, giungendo a paragonarlo a «un maiale in un giardino di rose» per usa-

re le parole di Hendrik Lenstra. Al contrario della ricerca di dimostrazioni inconfutabili, questo «andar per primi» era visto come un'occupazione secondaria, di scarso rilievo matematico. Ma quando l'importanza commerciale della cifratura RSA crebbe, non fu più possibile ignorare le implicazioni pratiche che avrebbe avuto la scoperta di un metodo efficiente per portare alla luce i numeri primi nascosti all'interno dei grandi numeri. Poco alla volta, sempre più matematici si lasciarono coinvolgere nella sfida di scomporre RSA 129. Il passo decisivo avvenne non tanto grazie allo sviluppo di computer più veloci, quanto grazie a degli inattesi progressi teorici. I nuovi problemi che scaturiscono da queste scorribande nel campo della decrittazione di codici hanno portato allo sviluppo di una matematica profonda e complessa.

Uno dei matematici che si lasciarono attrarre da questa disciplina emergente era Carl Pomerance. Pomerance ama dividere il proprio tempo fra i corridoi accademici dell'università della Georgia e l'ambiente più commerciale dei Bell Laboratories di Murray Hill, nel New Jersey. Come matematico non ha mai perduto il piacere fanciullesco di giocare con i numeri e di cercare nuovi collegamenti fra di essi. Pomerance attrasse l'attenzione di Paul Erdős quando il matematico ungherese lesse un suo singolare articolo sulle combinazioni numeriche dei punteggi nel baseball. Stimolato da una domanda curiosa che veniva posta in quell'articolo, Erdős piombò su Pomerance in Georgia per avviare una collaborazione che avrebbe prodotto trenta pubblicazioni firmate in coppia.

La scomposizione dei numeri aveva affascinato Pomerance fin da quando gli era stato chiesto di fattorizzare il numero 8.051 in una gara di matematica alla scuola superiore. C'era un limite di tempo di cinque minuti e negli anni Sessanta le calcolatrici tascabili non esistevano. Benché fosse bravissimo a fare calcoli aritmetici a mente, Pomerance aveva deciso di cercare prima di tutto un percorso rapido che lo conducesse alla soluzione senza dover procedere sistematicamente nella verifica di tutti i possibili divisori. «Spesi un paio di minuti per cercare un metodo ingegnoso, ma cominciavo a temere di stare sprecando troppo tempo. Così mi misi tardivamente a fare tentativi di divisioni, ma *avevo* sprecato troppo tempo, e non riuscii a risolvere il problema.»

Quell'insuccesso nella scomposizione di 8.051 fu all'origine di una caccia a un metodo rapido per fattorizzare i numeri che Pomerance non avrebbe più abbandonato. Alla fine scoprì qual era il trucco che il suo insegnate di scuola superiore aveva avuto in mente. Prima del 1977, il modo più ingegnoso per scomporre un numero apparteneva ancora, incredibilmente, all'uomo il cui piccolo teorema aveva fatto da catalizzatore per l'invenzione della cifratura RSA. Il metodo di fattorizzazione di Fermat è il modo più veloce per scomporre alcune categorie speciali di numeri sfruttando semplici procedure algebriche. Usando il metodo di Fermat, Pomerance impiegò pochi secondi per scomporre 8.051 in 83×97. Fermat, che aveva una vera passione per i codici segreti, sarebbe probabilmente stato deliziato di trovare tre secoli

più tardi la sua opera al cuore della realizzazione e della decifrazione di codici.

Quando Pomerance venne a sapere della sfida lanciata da Rivest, Shamir e Adleman, capì immediatamente che scomporre quel numero di 129 cifre sarebbe stato il modo per esorcizzare il ricordo del suo insuccesso scolastico. Nei primi anni Ottanta gli fu improvvisamente chiaro che esisteva un sistema per sfruttare il metodo di fattorizzazione di Fermat. Applicandolo su una moltitudine di calcolatori a orologio differenti, il metodo poteva fornire una potente macchina per la fattorizzazione. Ma adesso in gioco non c'era più una semplice competizione matematica della scuola superiore. La nuova scoperta, a cui fu dato il nome di *crivello quadratico*, aveva implicazioni molto serie per il mondo emergente della sicurezza in Internet.

Il crivello quadratico di Pomerance funziona in base al metodo di fattorizzazione di Fermat, ma cambiando continuamente il calcolatore a orologio usato per tentare di scomporre il numero. Il metodo è simile al crivello di Eratostene, la tecnica inventata dal bibliotecario alessandrino che individua i numeri primi prendendo in considerazione un primo alla volta per poi depennare tutti i numeri che sono suoi multipli. Così, facendo passare i numeri attraverso setacci con maglie di diverse dimensioni, i numeri che non sono primi vengono eliminati senza che ci sia bisogno di esaminarli uno per uno. Nell'attacco portato da Pomerance, invece di usare setacci con maglie di diverse dimensioni si varia il numero di ore sul quadrante dei calcolatori a orologio. I cal-

coli eseguiti su ogni singolo calcolatore a orologio fornivano a Pomerance informazioni sempre più precise sui possibili fattori primi di un numero: tanto maggiore era il numero di orologi che fosse riuscito a usare, quanto più avrebbe potuto avvicinarsi alla scomposizione di un numero nei suoi costituenti primi.

La verifica decisiva era l'applicazione dell'idea alla sfida posta da RSA 129. Ma negli anni Ottanta quel numero era ancora ben fuori dalla portata della macchina per la fattorizzazione di Pomerance. Nei primi anni Novanta giunse un aiuto nella forma di Internet. Due matematici, Arjen Lenstra e Mark Manasse, compresero che Internet sarebbe stato l'alleato perfetto per il crivello quadratico in un attacco a RSA 129. La bellezza del metodo di Pomerance era data dal fatto che il carico di lavoro poteva essere diviso fra molti computer. Internet era già stato usato per trovare primi di Mersenne assegnando compiti diversi a diversi personal computer. Manasse e Lenstra capirono che ora potevano usare Internet per un attacco coordinato a RSA 129. A ciascun computer potevano essere assegnati differenti orologi con cui setacciare i numeri primi. All'improvviso si chiedeva a Internet – che in teoria quei codici avrebbero dovuto proteggere – di contribuire a vincere la sfida posta da RSA 129.

Lenstra e Manasse distribuirono il crivello quadratico su Internet e ingaggiarono dei volontari. Nell'aprile 1994 giunse l'annuncio che RSA 129 aveva capitolato. Grazie al lavoro coordinato di varie centinaia di personal computer in ventiquattro Paesi, RSA 129 fu scomposto dopo otto mesi di tem-

po macchina complessivo, nell'ambito di un progetto guidato da Derek Atkins del MIT, Michael Graff della Iowa State University, Paul Leyland della Oxford University e Arjen Lenstra. Alla ricerca contribuirono persino due macchine per fax: quando non erano impegnate a inviare o a ricevere facsimili, contribuivano anch'essi a cercare i due numeri primi di 65 e 64 cifre. Nel progetto furono usati 524.339 differenti calcolatori a orologio con un numero primo di ore.

Alla fine degli anni Novanta Rivest, Shamir e Adleman lanciarono una nuova serie di sfide. Alla fine del 2002, il più piccolo numero da loro proposto che ancora resisteva ai tentativi di scomposizione aveva 160 cifre. Le finanze dei tre sono molto migliorate a partire dal 1977, così che ora potete vincere diecimila dollari se riuscite a scomporre uno dei numeri RSA proposti come sfida. Rivest si è disfatto dei numeri primi usati per costruire questi numeri, e dunque nessuno conosce le risposte prima che i numeri vengano fattorizzati. Per il sistema di cifratura RSA diecimila dollari sono un piccolo prezzo da pagare in cambio dell'opportunità di mantenersi in vantaggio sull'agguerrito gruppo di decrittatori di numeri in attività. E ogni volta che viene stabilito un nuovo record, l'RSA non deve far altro che consigliare ai suoi clienti di aumentare le dimensioni dei numeri primi.

Il crivello quadratico di Pomerance è stato soppiantato da un nuovo metodo di decrittazione chiamato *crivello del campo numerico*. Questo crivello ha permesso la scomposizione del numero RSA 155 nell'agosto 1999. Il risultato è stato raggiunto da una rete di matematici raccolti sotto il nome messianico

di Kabalah. RSA 155 ha rappresentato una svolta psicologica importante. A metà degli anni Ottanta, quando i servizi di sicurezza stavano ancora trastullandosi con l'idea di adottare la cifratura RSA, questo livello di complessità era considerato sufficiente a garantire la sicurezza dei computer. Come ha ammesso Ansgar Heuser della BSI, l'agenzia tedesca per la sicurezza nazionale, se si fosse deciso di adottare quegli standard «ci saremmo potuti trovare nel bel mezzo di un disastro». Il 3 dicembre 2003 i matematici hanno annunciato che anche RSA 174 era stato fattorizzato. Oggi il sistema di sicurezza RSA raccomanda di usare orologi con un numero N di ore che sia composto da almeno 230 cifre. Ma le agenzie governative come la BSI, che necessitano di un livello di sicurezza in grado di garantire una protezione a lungo termine per i propri agenti, attualmente raccomandano l'uso di orologi con più di 600 cifre.

Con la testa sotto la sabbia

Il crivello del campo numerico fa una breve apparizione nel film hollywoodiano *I signori della truffa*. Robert Redford se ne sta seduto ad ascoltare un giovane matematico che tiene una lezione sulla scomposizione di numeri molto grandi: «Il crivello del campo numerico è il miglior metodo attualmente disponibile. Esiste l'interessante possibilità di un approccio molto più elegante [...] Ma forse – dico forse – c'è una scorciatoia...». Naturalmente questo giovane prodigio della matematica, interpretato da Donal Logue, ha scoperto quel meto-

do, «una svolta di proporzioni gaussiane» e lo ha incorporato in una piccola scatola che, com'è facile immaginare, finirà nelle mani del cattivo del film, interpretato da Ben Kingsley. La trama è così strampalata che quasi tutti gli spettatori probabilmente immaginano che cose del genere non potrebbero mai succedere nel mondo reale. Eppure, ecco che mentre scorrono i titoli di coda salta fuori la voce «Consulente matematico: Len Adleman». La A in RSA. Come lo stesso Adleman ammette, non possiamo escludere che quello scenario non si avvererà. Larry Lasker, che ha scritto *I signori della truffa*, *Risvegli* e *Wargames*, si è rivolto ad Adleman perché controllasse che nella sceneggiatura non ci fossero errori matematici. «Mi piaceva Larry e mi piaceva il suo desiderio di verosimiglianza, così acconsentii. Larry mi offriva del denaro, ma io gli feci una controproposta: avrei scritto la scena se mia moglie avesse potuto incontrare Robert Redford.»

Quanto sono preparate le imprese commerciali e gli enti governativi per la sicurezza a una simile svolta in ambito teorico? Qualcuno più di altri, ma nel complesso la maggior parte nasconde la testa nella sabbia. Se si rivolge loro la domanda, le risposte che si ottengono sono piuttosto preoccupanti. Quelli che seguono sono tutti commenti che ho registrato nel circuito crittografico:

> «Noi ci siamo adeguati agli standard del governo, che è tutto quello che ci preoccupa.»
> «Se cadiamo, perlomeno ci sarà un sacco di altra gente che cadrà insieme a noi.»

«La speranza è che io sarò comunque in pensione prima che si verifichi un progresso matematico di quel genere, perciò non sarà un mio problema.»
«Lavoriamo basandoci sul principio della speranza: nessuno si aspetta un svolta di tali proporzioni nell'immediato futuro.»
«Nessuno è in grado di dare delle garanzie. Semplicemente, non ci aspettiamo che accada.»

Quando mi capita di parlare della sicurezza in Internet davanti a esponenti del mondo economico, mi diverto a lanciare una mia piccola sfida di cifratura RSA: metto in palio una bottiglia di champagne per la prima persona che scopra i due numeri primi il cui prodotto è 126.619. Le diverse reazioni che ho registrato quando ho proposto questa sfida in tre seminari per dirigenti di banca in vari angoli del globo mi hanno rivelato le differenze di interesse culturale nell'atteggiamento che il mondo finanziario ha nei riguardi del problema della sicurezza. A Venezia la sfida da me proposta e la matematica che sta alla base di quei codici hanno attraversato le teste dei banchieri europei senza lasciare letteralmente traccia, e io ho dovuto fare ricorso a un complice infiltrato fra il pubblico per fornire la soluzione. A differenza dei banchieri europei, con la preparazione umanistica che la maggior parte di loro possiede, la comunità finanziaria dell'Estremo Oriente ha un background scientifico molto più consistente. Prima della fine della mia conferenza, a Bali, un uomo si è alzato in piedi, ha detto quali erano i due numeri primi e ha reclamato lo champagne. I presenti dimostravano

di apprezzare la matematica e la sua applicazione nell'e-business molto più dei loro colleghi europei.

Ma è stata la presentazione fatta davanti a un pubblico di operatori americani a fornirmi l'indicazione più rilevante. Non erano ancora passati quindici minuti da quando ero ritornato nella mia stanza d'albergo dopo la fine della conferenza che ricevetti tre telefonate con le soluzioni corrette. Due dei dirigenti di banca statunitensi si erano connessi a Internet, avevano scaricato dei programmi di decrittazione li avevano utilizzati per scomporre 126.619. Il terzo fu molto reticente riguardo al metodo utilizzato e c'erano forti sospetti che avesse intercettato le telefonate degli altri due.

Il mondo dell'economia ha riposto la sua fiducia in metodi matematici che pochi si sono presi il disturbo di esaminare in prima persona. È pur vero che la minaccia immediata per la sicurezza delle transazioni di tutti i giorni viene più probabilmente da un'amministrazione negligente, che lascia informazioni non cifrate sul sito web. Come ogni sistema crittografico, l'RSA è esposto alle debolezze umane. Durante la Seconda guerra mondiale gli Alleati beneficiarono di una caterva di errori da manuale compiuti dagli operatori tedeschi, errori che li aiutarono a decifrare Enigma. Allo stesso modo, la sicurezza del sistema RSA può essere minata da operatori che scelgono numeri troppo facili da scomporre. Se avete intenzione di decrittare codici, fare incetta di computer di seconda mano è probabilmente un investimento migliore che non iscriversi a un dottorato in un dipartimento di matematica pura. La quantità di informazio-

ni delicate che vengono lasciate su macchine antiquate è spaventosa. Corrompere qualcuno che protegge le chiavi segrete potrebbe far molto di più per le vostre finanze che sponsorizzare un team di matematici affidando loro il compito di scomporre grandi numeri. Come nota Bruce Schneier nel suo libro *Applied Cryptography*, «è di gran lunga più facile trovare punti deboli nelle persone che non trovarli nei sistemi crittografici».

Tuttavia queste brecce nella sicurezza, benché gravi per l'azienda coinvolta, non pongono alcuna minaccia al tessuto globale dell'economia in Internet. È questo che rende stimolante un film come *I signori della truffa*. Sebbene le probabilità che avvenga una svolta nella scomposizione dei numeri siano piccole, il rischio esiste, e il risultato sarebbe devastante su una scala globale. Potrebbe produrre una vera catastrofe per l'e-business, e far crollare l'intero edificio della posta elettronica. Noi *pensiamo* che scomporre grandi numeri sia un problema intrinsecamente difficile, ma non possiamo dimostrarlo. Libereremmo da un gran peso moltissimi dirigenti se potessimo dar loro la garanzia che è impossibile trovare un programma veloce in grado di fattorizzare i numeri. Naturalmente è difficile dimostrare che una cosa del genere non esista.

Scomporre numeri è un compito complesso non perché la matematica coinvolta sia particolarmente difficile, ma perché il pagliaio in cui cercare i due aghi è gigantesco. Ci sono molti altri problemi caratterizzati da un analogo «pagliaio». Per esempio, benché ogni mappa possa essere dipin-

ta con quattro colori, come si può stabilire se, data una particolare mappa, sia possibile cavarsela usando soltanto tre colori? L'unico modo per stabilirlo sembrerebbe essere quello laborioso di passare in rassegna tutte le possibili combinazioni finché, con un po' di fortuna, non ci si imbatte in una mappa che richiede solo tre colori.

Uno dei Problemi del Millennio di Landon T. Clay, noto come *P versus NP*, solleva una questione piuttosto interessante su questo tipo di problemi. Se la complessità di un problema come la fattorizzazione di numeri o il modo di colorare mappe deriva dalle dimensioni molto grandi del pagliaio in cui bisogna cercare, è possibile che esista sempre un metodo efficiente per trovare l'ago? La sensazione è che la risposta al problema *P versus NP* sia «no». Ci sono problemi la cui complessità intrinseca non si può aggirare nemmeno con le capacità di penetrazione di un moderno Gauss. Se però la risposta si rivelasse essere un «sì», allora, come afferma Rivest, «sarebbe una catastrofe per la comunità dei crittografi». La maggioranza dei sistemi crittografici, compreso l'RSA, riguarda problemi del tipo che coinvolge grandi pagliai. Una risposta positiva a questo problema del millennio significherebbe che esiste davvero un metodo veloce per scomporre i numeri. È solo che non l'abbiamo ancora trovato!

Che il mondo degli affari non si interessi più di tanto all'ossessione con cui noi matematici perseguiamo l'erezione del nostro edifico matematico su fondamenta che siano sicure al cento per cento non è poi così sorprendente. La scomposizione dei numeri è da millenni un'impresa difficile, e

dunque il mondo economico è ben felice di erigere il suo centro commerciale globale in Internet su fondamenta che sono sicure al 99,99 per cento. La maggior parte dei matematici ritiene che ci sia qualcosa di intrinsecamente difficile nelle procedure di calcolo necessarie per la fattorizzazione. Ma nessuno è in grado di prevedere quali progressi potranno portare i prossimi decenni. Dopo tutto, una ventina d'anni fa RSA 129 sembrava inattaccabile.

Una delle ragioni principali per cui fattorizzare i numeri è tanto difficile è la casualità della distribuzione dei numeri primi. Poiché l'ipotesi di Riemann cerca di individuare l'origine di questo comportamento incontrollabile dei numeri primi, una sua dimostrazione potrebbe fornire nuove intuizioni. Nel 1900, descrivendo l'ipotesi di Riemann, Hilbert aveva sottolineato che una sua soluzione aveva la possibilità teorica di svelare molti altri segreti relativi ai numeri. Dato il ruolo centrale dell'ipotesi di Riemann per la comprensione dei numeri primi, i matematici hanno cominciato a ipotizzare che una sua dimostrazione, se mai la si trovasse, potrebbe produrre nuovi metodi per fattorizzare i numeri. È per questo che oggi le aziende stanno cominciando a tenere d'occhio l'astruso mondo della ricerca sui numeri primi. Ma c'è anche un'altra ragione per la quale il mondo economico è particolarmente interessato all'ipotesi di Riemann. Prima di poter usare la cifratura RSA, le aziende che operano su Internet devono trovare due numeri primi di sessanta cifre. Se l'ipotesi di Riemann è corretta, allora esiste un metodo rapido per scoprire i numeri primi con i quali costrui-

re i codici RSA a cui è affidata attualmente la sicurezza del commercio elettronico.

Caccia ai grandi numeri primi

Dato il ritmo crescente con cui Internet si sviluppa e la conseguente richiesta di numeri primi sempre più grandi, la dimostrazione di Euclide del fatto che i numeri primi non si esauriranno mai assume di colpo un'inattesa importanza commerciale. Ma se i numeri primi formano un gruppo così indisciplinato, come faranno le aziende a trovare questi grandi numeri primi? È vero che ne esistono infiniti, ma man mano che procediamo nel conteggio si fanno sempre più radi. E se diminuiscono man mano che si prosegue a contare, esistono sufficienti numeri primi di circa sessanta cifre perché chiunque nel mondo ne abbia due con cui costruire la propria chiave privata? Anche ammesso che siano sufficienti, forse sono *appena* sufficienti, nel qual caso ci sono elevate possibilità che due persone scelgano la stessa coppia.

Fortunatamente, la Natura è stata benevola con il mondo del commercio elettronico. Dal teorema di Gauss sui numeri primi si deduce che il numero dei numeri primi con sessanta cifre è approssimativamente pari a 10^{60} diviso per il logaritmo di 10^{60}. Questo significa che esistono abbastanza numeri primi con sessanta cifre perché ogni atomo della Terra abbia la propria coppia. E non solo. Le possibilità di vincere la lotteria nazionale sono maggiori delle probabilità

che a due atomi differenti sia assegnata la stessa coppia di numeri primi.

Perciò, stabilito che ci sono abbastanza numeri primi per tutti, come possiamo avere la certezza che un numero sia primo? Come abbiamo visto, trovare i primi da cui è costituito un numero che non è primo è già molto difficile. Se un numero candidato è primo, allora non sarà due volte più difficile stabilirlo? Dopo tutto, significa verificare che nessun numero più piccolo è un suo divisore.

In realtà, stabilire se un numero è primo non è quell'impresa improba che ci si potrebbe immaginare. Esiste un metodo che permette di verificare rapidamente se un numero non è primo anche se non si è in grado di individuare uno solo dei numeri primi che lo compongono. Ecco perché già ventisette anni prima di annunciare il suo calcolo Cole sapeva, e con lui il resto del mondo matematico, che il numero che stava tentando di scomporre non era primo. Questo metodo di verifica non è di grande aiuto per predire la distribuzione dei numeri primi, il cuore dell'ipotesi di Riemann. Ma poiché ci dice se un numero specifico qualsiasi è primo oppure no, ci dà l'opportunità di ascoltare le singole note della musica, anche se non serve ad apprezzare l'insieme della melodia racchiusa nell'ipotesi di Riemann.

All'origine di questo test c'è il piccolo teorema di Fermat, che Rivest aveva sfruttato la notte in cui aveva scoperto la cifratura RSA con l'aiuto del vino rituale del Seder. Fermat aveva scoperto che se si inserisce un numero in un calcolatore a orologio con un numero primo p di ore sul quadrante e poi lo

si eleva alla p-esima potenza, si ottiene sempre il numero da cui si è partiti. Eulero comprese che il piccolo teorema di Fermat poteva essere usato per dimostrare che un numero *non è* primo. Su un orologio di 6 ore, per esempio, moltiplicare 2 per se stesso 6 volte porta la lancetta dell'orologio sulle 4. Se 6 fosse un numero primo, dopo il calcolo ci dovremmo ritrovare di nuovo alle 2. Perciò il piccolo teorema di Fermat ci dice che 6 non può essere un numero primo, altrimenti rappresenterebbe un controesempio al teorema.

Se vogliamo stabilire se un numero p è primo, prendiamo un calcolatore a orologio con p ore sul quadrante. Facciamo il test su diverse ore per vedere se elevandole alla p ritorniamo al punto da cui siamo partiti. Quando questo non accade, possiamo scartare il numero p, sicuri che non sia un numero primo. Ogni volta che troviamo un'ora che soddisfa il test di Fermat, d'altra parte, non avremo dimostrato che p è un numero primo, ma quell'ora dell'orologio testimonierà, per così dire, a favore della primalità che p rivendica.

Perché verificare le ore sull'orologio è molto meglio che verificare se ogni numero minore di p è un suo divisore? Il punto è che se p fallisce il test di Fermat, lo fallisce malamente. In tal caso, infatti, oltre la metà dei numeri presenti sul quadrante dell'orologio non supereranno il test, dando così testimonianza della non primalità di p. Il fatto che ci siano tanti modi di dimostrare che quel numero non è primo rappresenta perciò un importante passo avanti. In questo senso il metodo differisce fortemente dalla verifica sistematica della divisibilità di p, in cui si controlla ogni numero per vedere

se è un divisore di p. Se, per esempio, p è il prodotto di due soli numeri primi, allora quando si applica il test di divisibilità sono soltanto quei due numeri primi che possono dimostrare che p non è primo. Nessuno degli altri numeri sarà di alcun aiuto. È necessario centrare perfettamente il bersaglio perché il test di divisibilità funzioni.

In una delle sue numerosissime collaborazioni, Erdős stimò (anche se non dimostrò rigorosamente) che nel caso in cui si voglia stabilire se un numero inferiore a 10^{150} è primo, trovare una sola ora sull'orologio che superi il test di Fermat significa che le probabilità che quel numero non sia primo si riducono già a 1 su 10^{43}. Paulo Ribenboim, autore di *The Book of Prime Number Records*, sottolinea che usando questo test qualsiasi impresa che venda numeri primi potrebbe realisticamente piazzare la propria merce con lo slogan «soddisfatti o rimborsati» senza timore di andare in rovina.

Nel corso dei secoli i matematici hanno perfezionato il test di Fermat. Negli anni Ottanta del secolo scorso due matematici, Gary Miller e Michael Rabin, hanno finalmente escogitato una variante del test in grado di garantire la primalità di un numero primo dopo poche verifiche. Ma il test di Miller-Rabin è accompagnato da un piccolo inghippo matematico: nel caso di numeri davvero molto grandi, funziona solo a patto che l'ipotesi di Riemann sia vera. (Per essere precisi, è necessario che sia vera una versione leggermente generalizzata dell'ipotesi di Riemann.) Di tutte le cose che sappiamo nascondersi dietro il monte Riemann, questa è probabilmente una delle più importanti. Se riuscirete a

dimostrare l'ipotesi di Riemann e la sua generalizzazione, dunque, oltre a intascare un milione di dollari, avrete stabilito con certezza assoluta che il test di Miller-Rabin è un metodo rapido ed efficiente per verificare se un numero è primo oppure no.

Nell'agosto del 2002 tre matematici indiani dell'Istituto di tecnologia di Kanpur, Manindra Agrawal, Neeraj Kayal e Nitin Saxena, hanno escogitato un'alternativa al test di Miller-Rabin. È un metodo leggermente più lento ma evita di dover presupporre la validità dell'ipotesi di Riemann. Per la comunità dei matematici che studiano i numeri primi questa scoperta è stata una sorpresa. Nelle ventiquattro ore successive all'annuncio proveniente da Kanpur, trentamila persone in ogni parte del mondo – e fra loro Carl Pomerance – avevano già scaricato l'articolo dalla rete. Il test era abbastanza semplice per permettere a Pomerance di presentarne i dettagli ai suoi colleghi in un seminario tenuto quello stesso pomeriggio. Egli definì il nuovo metodo «meravigliosamente elegante». Lo spirito di Ramanujan arde ancora in India, e questi tre matematici non hanno avuto paura di sfidare l'opinione prevalente su come si dovrebbe verificare la primalità di un numero. La loro storia alimenta la speranza che un giorno possa emergere un matematico sconosciuto con l'idea che risolverà finalmente l'ipotesi di Riemann, il problema più importante sui numeri primi.

È incredibile quanto la Natura sia stata benevola con la comunità dei crittografi. Ha regalato loro un metodo rapido e semplice per produrre i numeri primi con cui realizzare la

crittografia per Internet, e nel contempo ha celato alla vista ogni metodo rapido per scomporre i numeri nei primi da cui sono formati. Ma per quanto tempo ancora la Natura starà dalla parte dei crittografi?

Il futuro è luminoso, il futuro è ellittico

L'applicazione della teoria dei numeri primi a un problema così fondamentale per il mondo degli affari ha aumentato notevolmente il prestigio sociale della matematica. Quando qualcuno mette in dubbio l'utilità di un'area di ricerca tanto esoterica quanto è la teoria dei numeri, far notare il ruolo che hanno i numeri primi nella cifratura RSA è diventato un modo molto efficace di controbattere a quelle accuse. Nel discorso intitolato «L'importanza della matematica», pronunciato in occasione dell'annuncio dei premi Clay per i Problemi del Millennio, Timothy Gowers, vincitore di una medaglia Fields, ha usato proprio questo esempio per giustificare l'utilità della matematica.

Nei giorni precedenti all'avvento di questa nuova crittografia, la maggior parte dei matematici avrebbe avuto grandi difficoltà a immaginare un'applicazione di così alto profilo della matematica astratta, e che oltretutto è in grado di attrarre l'attenzione immediata della gente. Essa ha prodotto un cambiamento di rotta propizio e tempestivo nella disciplina. Potete avere la certezza pressoché assoluta che in una qualsiasi richiesta di finanziamento per una ricerca nel cam-

po della teoria dei numeri, da qualche parte comparirà la frase a effetto «e potrebbero anche esserci delle implicazioni crittografiche». Per essere onesti, la matematica che sta alla base del sistema crittografico RSA non è poi così profonda. Quasi tutti i matematici non si sognerebbero di paragonare la soluzione dei problemi posti dalla fattorizzazione dei numeri alla prospettiva di venire a capo di misteri di lunga data come l'ipotesi di Riemann.

Benché le soluzioni dell'ipotesi di Riemann e del problema *P versus NP* possano avere entrambe delle conseguenze per la cifratura RSA, è stato un altro dei Problemi del Millennio a produrre quasi una catastrofe nell'e-business. All'inizio del 1999 si stava diffondendo rapidamente la voce che una strana cosa chiamata congettura di Birch–Swinnerton-Dyer, un problema relativo a delle strane entità chiamate curve ellittiche, poteva rivelare quale fosse il tallone d'Achille della sicurezza in Internet. Nel gennaio di quell'anno, sulla prima pagina del «Times» era apparso un articolo intitolato «Adolescente decifra codice e-mail». Quell'impresa aveva fatto vincere a Sarah Flannery, una ragazzina irlandese, il primo premio in una gara di scienze, ma prometteva ricchezze ben più remunerative. Una fotografia la ritraeva davanti a una lavagna riempita da una sfilza impressionante di complessi calcoli matematici. La didascalia recitava: «Sarah Flannery, 16 anni, ha sconcertato i giudici con la sua padronanza della crittografia. Il suo lavoro è stato definito "brillante"». Data la dipendenza di Internet dai «codici e-mail», quell'articolo era destinato ad attrarre l'attenzione dei media e del pubblico.

Una lettura più approfondita rivelava che la «decifrazione» a cui si faceva riferimento nel titolo non era un nuovo attacco alla sicurezza della cifratura RSA ma la soluzione di un problema pratico che affligge la sua applicazione.

Per cifrare e decifrare un numero di carta di credito usando il sistema RSA, quel numero viene moltiplicato per se stesso molte volte su un calcolatore a orologio il cui numero di ore raggiunge parecchie centinaia di cifre. In effetti un computer impiega un tempo piuttosto lungo per compiere calcoli su numeri tanto grandi. Nella maggior parte dei casi i siti web vi chiedono altre informazioni oltre ai dettagli della vostra carta di credito, e usano la cifratura RSA per scegliere una chiave privata che verrà usata dal vostro computer e dal sito per codificare tutti quei dettagli. Le chiavi private, condivise da chi invia i dati e da chi li riceve, permettono una codifica molto più veloce rispetto alle chiavi pubbliche RSA.

Se state facendo acquisti su Internet dalla tranquillità di casa vostra, utilizzando un personal computer dotato di tanta memoria e di un microprocessore veloce, non vi accorgerete nemmeno del tempo che esso ci mette per cifrare il vostro numero di carta di credito. Sempre più spesso, tuttavia, non è soltanto da casa che accediamo a Internet. Telefoni mobili, computer palmari e altri apparecchi portatili che compariranno negli anni a venire sono anch'essi in grado di navigare in Internet. La cosiddetta tecnologia 3G (di terza generazione) fornisce a questi apparecchi i mezzi per comunicare con la rete. Ma quando giunge il momento di codificare un numero di carta di credito su un palmare dopo una

mattinata di shopping su Internet, la potenza di quel piccolo computer portatile è spinta all'estremo.

I telefoni mobili e i computer palmari non sono fatti per eseguire grossi calcoli. Possiedono molta meno memoria e microprocessori più lenti rispetto al computer che sta posato sulla vostra scrivania. Non solo: la banda di frequenze su cui gli apparecchi mobili trasmettono le informazioni è molto più stretta di quella di cui si dispone quando si inviano dati lungo le linee telefoniche o i cavi di fibre ottiche. È dunque importante minimizzare la quantità dei dati che si trasmettono. I numeri sempre più grandi di cui la cifratura RSA ha bisogno per tener testa ai computer sempre più veloci usati per decrittare i codici la rendono inadatta alle capacità limitate degli apparecchi portatili.

Per qualche tempo i crittografi hanno cercato un nuovo sistema di cifratura a chiave pubblica che garantisse tutta la sicurezza e le capacità dell'RSA, ma che fosse più piccolo e veloce. Nel 1999, il «Times» e altri media inglesi si avventarono come falchi sulla notizia della possibile scoperta da parte della sedicenne Sarah Flannery di un sistema di questo tipo. Il codice ideato dalla ragazzina irlandese era molto veloce, ma a sei mesi dal suo annuncio qualcuno individuò un punto debole che rendeva quel codice insicuro. Questa storia è un salutare ammonimento per il mondo del commercio, di cui alcuni rappresentanti avevano coltivato la speranza di trarre un profitto dal nuovo codice di Sarah Flannery. A suo merito, va detto che Sarah non sostenne mai che il suo codice fosse sicuro. La sicurezza di un sistema crittografico

può essere dimostrata solo dal tempo e dalle verifiche, due cose che i media non apprezzano troppo. In definitiva, era proprio ciò che aveva permesso di rendere il codice più veloce ad aumentarne la vulnerabilità.

Esiste un rivale dell'RSA che sta cominciando a rispondere alle sfide poste dal mondo del cosiddetto m-commerce, delle comunicazioni mobili, senza fili. Dietro a questi nuovi codici non ci sono i numeri primi ma entità più esotiche: le *curve ellittiche*. Tali curve sono definite da equazioni di tipo speciale, e sono state fondamentali per la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat da parte di Andrew Wiles. Le curve ellittiche si erano già fatte strada nel mondo della crittografia come parte di un nuovo metodo per fattorizzare rapidamente i numeri. Sembra che esista una regola non scritta in base alla quale i decrittatori che violano un sistema di cifratura risarciscono i crittografi fornendo involontariamente loro un codice ancora più sicuro. Neal Koblitz della Washington State University di Seattle stava studiando questo metodo per decrittare i codici basati sui numeri primi quando intuì che le curve ellittiche potevano essere altrettanto utili per produrre codici. Koblitz propose la sua idea di una crittografia basata sulle curve ellittiche a metà degli anni Ottanta. Contemporaneamente, anche Victor Miller del Ramapo College nel New Jersey scoprì come realizzare codici usando le curve ellittiche. Benché siano più complicati rispetto alla cifratura RSA, i codici basati sulle curve ellittiche non necessitano di chiavi numeriche enormi, e ciò li rende perfetti per l'm-commerce.

Anche se Koblitz è stato risucchiato nel mondo del business dalla propria creazione di un sistema crittografico adatto agli apparecchi mobili, il suo cuore rimane fedele al mondo della pura teoria dei numeri cara a Hardy. Koblitz, che è uno dei veterani del circuito dei teorici dei numeri, conserva l'entusiasmo per la matematica che provava da ragazzo, un entusiasmo che fu innescato da una serie di eventi fortuiti:

> Quando avevo sei anni, la mia famiglia trascorse un anno a Baroda, in India. Laggiù gli standard d'insegnamento della matematica erano più alti che nelle scuole americane. L'anno seguente, quando feci ritorno negli Stati Uniti, ero così avanti rispetto ai miei compagni di classe che i miei insegnanti si convinsero erroneamente che io avessi una particolare predisposizione per la matematica. Come altre idee sbagliate che gli insegnati si mettono in testa, questo genere di convinzione finisce per diventare una profezia che si autoavvera. In conseguenza di tutto l'incoraggiamento che ricevetti dopo essere ritornato dall'India, presi la strada che mi avrebbe portato a diventare un matematico.

L'anno trascorso dal piccolo Koblitz in India non contribuì soltanto al suo sviluppo matematico; fu anche all'origine di una profonda presa di coscienza delle ingiustizie sociali nel mondo. Da adulto Koblitz ha partecipato a missioni in Vietnam e nell'America centrale. Uno dei suoi tanti libri sulla teoria dei numeri e la crittografia è dedicato «alla memoria degli studenti del Vietnam, del Nicaragua e di El Salvador

che hanno perso la vita nella lotta contro l'aggressione degli Stati Uniti». I proventi della vendita del libro sono usati per procurare libri alle popolazioni di quei tre Paesi.

In patria, Koblitz mal sopporta la stretta soffocante che l'Agenzia per la sicurezza nazionale (NSA) esercita sull'area della matematica di cui lui si occupa. Oggi è necessario ottenere l'autorizzazione dell'NSA prima di poter pubblicare certi tipi di ricerche nel campo della teoria dei numeri, persino quando finiscono nelle riviste scientifiche più oscure. Grazie alle idee innovative di Koblitz, le curve ellittiche sono finite accanto ai numeri primi nell'«elenco delle ricerche soggette a restrizioni» che le autorità vogliono tener sotto controllo.

Rivest, Shamir e Adleman avevano utilizzato i calcolatori a orologio di Gauss per codificare i numeri delle carte di credito. Adesso Koblitz proponeva di far perdere le tracce delle carte di credito in qualche punto di queste strane curve. Invece di moltiplicare le ore di un orologio, Koblitz intendeva sfruttare una strana moltiplicazione che poteva essere definita sui punti delle curve ellittiche.

Le gioie della poesia caldea

Da principio, i tre dell'RSA si sentirono fortemente minacciati dall'inatteso arrivo di quel nuovo codice. Era una sfida al loro monopolio sulla crittografia in Internet. La loro ansia raggiunse l'apice nel 1997, quando decisero di aprire un sito

web chiamato ECC Central. Nel sito erano riportate citazioni di matematici e crittografi eminenti che avanzavano dubbi sulla presunta sicurezza delle curve ellittiche. Alcuni sostenevano che la fattorizzazione dei numeri aveva una tradizione molto più lunga, una tradizione che risaliva ai tempi di Gauss, e se nemmeno Gauss era riuscito venirne a capo, allora la sicurezza di chi adottava la cifratura RSA era garantita. Altri argomentavano che la struttura delle curve ellittiche era talmente ricca che avrebbe consentito agli hacker di ottenere una testa di ponte da cui sferrare il loro attacco. Quella crittografia era troppo nuova perché noi matematici potessimo dire se la nostra conoscenza delle curve ellittiche sarebbe stata sufficiente a decifrare un codice con chiavi di dimensioni tanto piccole. Dopo tutto, il codice di Sarah Flannery aveva resistito soltanto a sei mesi di verifiche.

Il team dell'RSA sottolineava anche che quando si parla ai banchieri di ciò che è alla base della sicurezza delle loro transazioni da miliardi di dollari, spiegare il problema della fattorizzazione dei numeri non è poi così difficile. Ma se ci si azzarda a scrivere $y^2 = x^3 + ...$, i loro occhi cominciano molto presto a farsi vitrei. La Certicom, la più importante impresa che propone la crittografia a curve ellittiche, replica a questa critica sostenendo che prima della fine dei corsi tenuti dall'azienda stessa sulla sicurezza finanziaria, i funzionari di banca si divertono a giocare con i punti delle curve ellittiche. Ma ciò che infastidì più di ogni altra cosa il campo dei propugnatori delle curve ellittiche fu un commento di Ron Rivest, la «R» dell'RSA: «Tentare di valutare la sicurezza di un siste-

ma di cifratura basato sulle curve ellittiche è un po' come tentare di valutare una poesia caldea scoperta da poco».

Neal Koblitz stava tenendo un corso sulle curve ellittiche a Berkeley quando il sito ECC Central aprì i battenti. Poiché non aveva mai sentito parlare di poesia caldea, Koblitz si affrettò a cercare informazioni nella biblioteca dell'università. Lì scoprì che i caldei erano un antico popolo semitico che aveva retto le sorti del regno di Babilonia fra il 625 e il 539 a.C. «La loro poesia era davvero fantastica» spiega. Così si fece fare delle magliette decorate con l'immagine di una curva ellittica e la scritta «Io amo la poesia caldea», e le distribuì durante le sue lezioni.

Per il momento la cifratura a curve ellittiche ha retto alla prova del tempo e ha trovato piena legittimazione entrando a far parte degli standard del governo. Oggi questo nuovo sistema crittografico viene utilizzato senza problemi nei telefoni mobili, nei computer palmari e nelle smart card. Il vostro numero di carta di credito è trasportato a gran velocità lungo queste curve ellittiche facendo perdere le proprie tracce nel tragitto. Benché originariamente fosse destinato a piccoli apparecchi portatili, la crittografia a curve ellittiche sta diventando il metodo preferito per la protezione delle informazioni anche su sistemi più grandi. La citata BSI ammette apertamente che oggi la vita dei suoi agenti è affidata alla sicurezza delle curve ellittiche. E persino le nostre vite verranno presto riposte nelle mani di queste curve ogni volta che voleremo. Le curve ellittiche sono destinate a proteggere la sicurezza dei sistemi di controllo del traffico aereo di tutto il

mondo. In seguito a questi successi, i responsabili dell'RSA hanno deciso di chiudere il sito ECC Central e oggi stanno conducendo le proprie ricerche allo scopo di affiancare la cifratura a curve ellittiche al loro sistema RSA.

Eppure nell'estate del 1998 i timori che la struttura supplementare posseduta dalle curve ellittiche potesse essere causa della loro rovina crittografica cominciarono a ossessionare chi aveva investito nella sicurezza che esse promettevano. Solo pochi mesi prima, Neal Koblitz aveva affermato che la congettura di Birch–Swinnerton-Dyer, uno dei più grandi problemi aperti che riguardano le curve ellittiche, non avrebbe mai e poi mai avuto conseguenze per l'uso delle curve ellittiche in crittografia. Ma come la predizione di Hardy secondo cui la teoria dei numeri non sarebbe mai stata utile, anche quella di Koblitz produsse l'effetto contrario, e con gli interessi. È probabile che sia stata proprio l'affermazione provocatoria di Koblitz a indurre Joseph Silverman della Brown University a proporre un attacco basato sulla presunta validità della congettura di Birch–Swinnerton-Dyer.

La congettura di Birch–Swinnerton-Dyer è uno dei sette Problemi del Millennio. Essa propone un modo per stabilire se l'equazione associata a una curva ellittica possieda un numero finito oppure infinito di soluzioni. Nel 1960 due matematici inglesi, Bryan Birch e Sir Peter Swinnerton-Dyer, ipotizzarono che la risposta si nascondesse in un paesaggio immaginario come quello scoperto da Riemann. Grazie alla loro congettura, i nomi di Birch e di Swinnerton-Dyer sono inestricabilmente legati (almeno per i matematici) a quelli di

Laurel e Hardy, anche se molti sono stati indotti a credere erroneamente che dietro la congettura ci siano tre matematici: Birch, Swinnerton e Dyer. Birch, con i suoi modi goffi, ricopre il ruolo di Stan Laurel rispetto al burbero Oliver Hardy impersonato da Swinnerton-Dyer.

Riemann aveva scoperto il cunicolo che conduceva dai numeri primi al paesaggio zeta. Un altro matematico di Gottinga, Helmut Hasse, ipotizzò che ciascuna curva ellittica avesse un suo proprio paesaggio immaginario. Hasse è una figura molto controversa nella storia della matematica tedesca. I nazisti gli affidarono la gestione del dipartimento di matematica di Gottinga nel periodo in cui Hitler lo stava smantellando. Le simpatie naziste di Hasse, unite alle sue capacità matematiche, lo rendevano il candidato ideale agli occhi delle autorità e a quelli dei matematici tedeschi che speravano di preservare la tradizione di Gottinga.

Ci sono sentimenti molto confusi nei riguardi di Hasse all'interno della comunità matematica. Pochi possono perdonargli le scelte politiche che fece. Scrisse persino alle autorità, nel 1937, chiedendo che uno dei suoi antenati ebrei fosse cancellato dai pubblici registri, di modo che lui potesse iscriversi al partito. Carl Ludwig Siegel ricorda di essere tornato da un viaggio nel 1938 e di essersi trovato davanti «Hasse che per la prima volta portava sui vestiti le insegne naziste! Per me è incomprensibile che un uomo intelligente e coscienzioso possa fare una cosa simile». A dispetto delle sue scelte politiche, l'intuito matematico di Hasse si dimostrò molto più integro. Il suo nome è stato reso immortale dalle

funzioni zeta di Hasse. Queste funzioni permettono di costruire i paesaggi che serbano i segreti per trovare le soluzioni alle equazioni delle curve ellittiche.

Mentre Riemann era riuscito a mostrare come fosse possibile costruire l'intero paesaggio che ricopre la mappa dei numeri immaginari, Hasse non poté fare la stessa cosa con i paesaggi ellittici. Per ciascuna curva ellittica, egli era in grado di costruire una parte del paesaggio associato, ma a un certo punto si trovava davanti una catena montuosa che correva da nord a sud, e non era in possesso delle tecniche necessarie a oltrepassarla. In effetti fu la soluzione data da Wiles all'ultimo teorema di Fermat che mostrò finalmente come fosse possibile attraversare quel confine e costruire la mappa della parte restante del paesaggio.

Tuttavia, quando ancora non sapevamo neppure se oltre quella catena ci fosse o meno un paesaggio, Birch e Swinnerton-Dyer già facevano congetture su ciò che quell'ipotetico paesaggio avrebbe potuto svelarci. Predissero che in ciascun paesaggio doveva esserci un punto che celava un segreto relativo alla curva ellittica usata per costruire quel particolare paesaggio: quel punto avrebbe permesso di stabilire se la curva ellittica associata avesse un numero infinito di soluzioni oppure no. Il trucco per stabilirlo consisteva nel misurare l'altitudine del paesaggio in corrispondenza del numero 1 sulla mappa dei numeri immaginari. Se in quel punto il paesaggio si trovava a livello del mare, allora la curva ellittica avrebbe avuto infinite soluzioni frazionarie. Se al contrario il paesaggio in quel punto non era a livello del mare, allora do-

veva esserci un numero finito di soluzioni frazionarie. Se la congettura di Birch–Swinnerton-Dyer è vera, e questo punto in ciascun paesaggio nasconde davvero il segreto per trovare le soluzioni sulla corrispondente curva ellittica, allora siamo di fronte a un altro esempio notevole del potere di questi paesaggi immaginari.

Benché Birch e Swinnerton-Dyer fossero motivati da considerazioni teoriche, la loro congettura era soprattutto il risultato di esperimenti compiuti su alcune particolari curve ellittiche. Birch ricorda il momento di improvvisa illuminazione in cui ogni cosa finì al proprio posto come per incanto. Stava giocherellando con i numeri che scaturivano dai suoi calcoli. «Accadde mentre ero ospite di un grazioso hotel nella Foresta Nera, in Germania. Stavo riportando i numeri che ottenevo su un grafico, ed ecco che mi trovo davanti a dozzine di punti disposti su quattro rette parallele [...] Meraviglioso!» Quelle quattro linee parallele indicavano l'esistenza di un forte nesso che costringeva i punti ad allinearsi. «Da quel momento in poi mi fu assolutamente chiaro che lì c'era qualcosa. Tornai da Peter e gli dissi: "Oh, guarda questo!".» E come se si trattasse di un altro di quei bei pasticci in cui Birch li cacciava, «Peter rispose: "Te l'avevo detto!", come fa sempre lui».

Da quando fu proposta negli anni Sessanta, sulla congettura sono stati compiuti progressi significativi. Sia Wiles sia Zagier hanno fornito contributi rilevanti, ma la strada da percorrere è ancora lunga. A conferma della sua importanza, la congettura è stata inserita fra i sette Problemi del Millen-

nio. È l'unico fra quei problemi sul quale si sono compiuti progressi continui verso una soluzione. Birch, tuttavia, ritiene che dovrà passare ancora molto tempo prima che qualcuno reclami il premio di Clay. Eppure la congettura di Birch–Swinnerton-Dyer ha rischiato di diventare la chiave per accedere non al milione di dollari messo in palio da Clay, ma ai molti milioni di dollari che dipendono dalla sicurezza dei codici in Internet.

I codici costruiti sulle curve ellittiche basano la propria inattaccabilità sulla difficoltà di trovare le soluzioni a certi problemi aritmetici. Joseph Silverman comprese che i risultati matematici a cui si arrivava ipotizzando che la congettura di Birch–Swinnerton-Dyer fosse vera avrebbero potuto fornirgli un metodo per rigirare il problema crittografico in modo da ottenere indicazioni su dove andare a cercare le soluzioni. Era certamente una scommessa azzardata, e lui stesso ammette che dubitava che quella fosse una strategia d'attacco molto efficiente. Ma nessuno degli esperti poteva scartare a cuor leggero la possibilità che si rivelasse uno di quegli algoritmi rapidi ai quali gli hacker davano la caccia.

Silverman avrebbe potuto rendere pubblico l'attacco che si proponeva di sferrare alla cifratura a curve ellittiche; i media si sarebbero scatenati; l'RSA avrebbe esultato; le azioni della Certicom sarebbero crollate; e le curve ellittiche non si sarebbero mai più riprese dall'immagine di inaffidabilità che quell'attacco, anche se fosse stato respinto, avrebbe generato. Ma Silverman decise di seguire una linea di comportamento

più accademica. Inviò per e-mail a Koblitz una bozza del proprio lavoro, tre settimane prima della conferenza in cui avrebbe presentato un articolo sull'argomento.

Koblitz doveva volare a Waterloo in Canada, dove ha sede la Certicom, alla fine della settimana. I dirigenti dell'azienda gli stavano inviando fax molto pressanti: speravano che saltasse fuori un rimedio temporaneo o una spiegazione del perché l'attacco era destinato a fallire. «All'inizio non riuscivo a trovare alcuna ragione per cui il progetto di Silverman non avrebbe dovuto funzionare.» Koblitz ama alzarsi presto i giorni in cui deve prendere un aereo, e sapeva di dover escogitare qualcosa per consolare i suoi amici a Waterloo. Prima di salire sull'aereo si era ormai convinto che se l'attacco di Silverman avesse avuto successo, lo si sarebbe potuto usare per abbattere anche la cifratura RSA. Perciò, se loro stavano per cadere, l'RSA li avrebbe seguiti.

«Fu un momento terrificante» ricorda Koblitz. «Mandai un'e-mail a Silverman per dirgli che è in momenti come questi che uno è contento di essere un matematico e non un uomo d'affari. Cominci a renderti conto che la vita è molto più eccitante dei film.» Ma probabilmente Silverman non era troppo sconvolto all'idea di vedere precipitare anche l'RSA. Faceva infatti parte di un team impegnato nello sviluppo di un nuovo sistema di cifratura che va sotto il nome di NTRU. Le persone coinvolte nel progetto sono restie a svelare il significato di NTRU, ma è opinione comune che la sigla stia per Number Theorists «R» Us, i teorici dei numeri siamo noi. A differenza degli altri due codici, il loro sarebbe

risultato immune all'attacco di Silverman. Una piega degli eventi senz'altro piacevole per le azioni dell'NTRU.

Entro due settimane Koblitz aveva identificato quanto bastava nella struttura speciale delle curve ellittiche per dimostrare che il progetto di Silverman era ancora irrealizzabile dal punto di vista computazionale. La cifratura a curve ellittiche fu salvata da un dettaglio tecnico che prende il nome di ottava funzione, ma che ora Koblitz chiama «lo scudo d'oro». Sembra che protegga i codici non soltanto dall'approccio tentato da Silverman ma anche da una pletora di altri attacchi. Dopo il panico iniziale, gli sviluppi seguenti sono stati caratterizzati dal ritorno a una serenità più consona all'ambiente accademico, e Koblitz si diverte ancora a tenere la conferenza che ha dedicato all'intera saga e che ha intitolato «Come la matematica pura fece quasi crollare l'e-business». La storia evidenzia come i progressi compiuti negli angoli più oscuri o astratti del mondo matematico abbiano oggi la capacità potenziale di mettere in ginocchio il mondo economico.

È esattamente per queste ragioni che le imprese come l'AT&T e i servizi di sicurezza nazionali tengono ben d'occhio il mondo «amabile e puro», per dirla con Hardy, della teoria dei numeri. Negli anni Ottanta e Novanta il responsabile dei laboratori di ricerca dell'AT&T Andrew Odlyzko ha cominciato a puntare i supercomputer dell'azienda su regioni del paesaggio di Riemann che in precedenza non erano mai state considerate. Probabilmente vi chiederete quale sia lo scopo di questi calcoli. Se non ci si aspetta di trovare un

controesempio all'ipotesi di Riemann, perché sprecare tanta energia e tanto denaro dell'AT&T per calcolare le posizioni degli zeri? A stimolare l'interesse di Odlyzko era stata la notizia di alcune strane predizioni teoriche fatte dal matematico americano Hugh Montgomery sugli zeri situati in punti remoti della retta magica di Riemann. Odlyzko capì che se quelle predizioni fossero state corrette, allora stava per aver luogo una delle svolte più strane e impreviste nella storia dei numeri primi.

11

Dagli zeri ordinati al caos quantistico

L'unico vero viaggio verso la scoperta non consiste nella ricerca di nuovi paesaggi, ma nell'avere nuovi occhi.
Marcel Proust, *Alla ricerca del tempo perduto*

Come si dispongono lungo la retta magica di Riemann i punti a livello del mare nel paesaggio zeta? Sembrava una domanda folle, ma Hugh Montgomery non aveva avuto l'intenzione di porsela. In effetti, quasi tutti consideravano perlomeno avventato porsi una tale questione quando nessuno era in grado di dimostrare che gli zeri si trovassero effettivamente su quella retta. Eppure le sorprendenti configurazioni che Montgomery scoprì dopo essersela posta rappresentano a oggi l'indizio migliore su dove andrebbe cercata una soluzione all'ipotesi di Riemann. Se Montgomery si stava ponendo questa domanda, era in primo luogo perché essa l'avrebbe aiutato a comprendere una questione di tutt'altra natura, una questione da cui era stato attratto quando era uno studente di dottorato. In quel periodo stava aggirandosi in un'area del mondo matematico

apparentemente disgiunta, alla ricerca di un'occasione per farsi notare quando, come Alice, senza sospettare nulla gli capitò di attraversare un passaggio segreto e si ritrovò in un paesaggio misterioso che era, guarda caso, proprio quello di Riemann.

A differenza della torma di matematici che girano in sandali, maglietta e jeans, Montgomery veste in maniera impeccabile, invariabilmente in giacca e cravatta. Il suo abbigliamento rispecchia la riservatezza e il controllo con cui conduce la propria esistenza di matematico. Benché sia originario degli Stati Uniti, scelse di fare il dottorato in Inghilterra, a Cambridge, dove si appassionò ai fasti della vita del college. Lo sviluppo del suo precoce interesse per la matematica fu favorito da un esperimento didattico condotto negli anni Sessanta sull'insegnamento della matematica nelle scuole dell'obbligo. Invece di inculcare un canone accettato senza fornire spiegazioni su come i matematici erano arrivati alle loro scoperte, l'esperimento didattico si proponeva di catturare il vero spirito dell'attività del matematico. A Montgomery e ai suoi coetanei venivano spiegati gli assiomi fondamentali e poi erano incoraggiati a dedurre da sé quel canone. Invece di mostrar loro il monumento come se fossero turisti, li si armava delle regole di deduzione e li si lasciava liberi di ricostruire l'edificio matematico per conto proprio. Ciò munì Montgomery di un buon punto di partenza:

> Fui davvero fortunato, perché quel programma didattico mi fece appassionare alla matematica. Già alla scuola superiore capivo che cosa significa essere un matematico. Naturalmente il problema era che si dovevano riqualificare tutti gli insegnan-

> ti di matematica per metterli nelle condizioni di poter applicare il metodo. Io ebbi la fortuna di essere allievo di uno di coloro che lo avevano ideato. Anche se coinvolse solo un numero relativamente piccolo di studenti, in effetti il progetto produsse un numero sorprendente di matematici professionisti.

A scuola, Montgomery si divertiva in particolare a esplorare le proprietà dei numeri, soprattutto dei numeri primi. Ma scoprì anche quanto poco si sapesse su quei numeri speciali. Esistevano infiniti numeri primi gemelli come 17 e 19 o 1.000.037 e 1.000.139? Ogni numero pari era la somma di due primi, come aveva congetturato Goldbach? Montgomery dovette aspettare di essere uno studente di dottorato a Cambridge per sentire parlare del più importante di tutti i problemi sui numeri primi: l'ipotesi di Riemann. Fu però un altro problema a catturare la sua attenzione quando cadde vittima per la prima volta dell'incantesimo della grande tradizione matematica di Cambridge.

Quando arrivò a Cambridge, alla fine degli anni Sessanta, Montgomery fu accolto da un'atmosfera di festa. Al dipartimento di matematica si celebrava un importante passo avanti nella soluzione di un problema che era stato posto dal grande Gauss. Alan Baker, un *fellow* del Trinity College, aveva compiuto progressi significativi sulla questione della fattorizzazione dei numeri immaginari. Era un problema di cui Gauss si era occupato estesamente nelle sue *Disquisitiones arithmeticae*. L'insieme dei numeri primi che compongono un numero ordinario, per esempio 140, è uno e uno solo.

Nel caso di 140 questi primi sono 2, 2, 5 e 7. Non esiste una scelta alternativa di numeri primi che moltiplicati fra loro diano come risultato 140. I numeri immaginari, tuttavia, non si comportano altrettanto bene. Gauss rimase molto colpito nello scoprire che talvolta c'era più di un modo di costruire un numero immaginario usando numeri primi.

Montgomery era ansioso di prender parte all'eccitazione che la soluzione di Baker a uno dei problemi di Gauss aveva generato. Riteneva di potersi guadagnare fama matematica estendendo le idee di Baker a uno degli altri problemi proposti da Gauss. Sfruttare oltre il contributo di Baker sarebbe stato difficile, ma Montgomery non si lasciò scoraggiare. Cominciò a leggere moltissimo, studiando quanta più teoria dei numeri gli fosse possibile. Non avrebbe potuto chiedere un ambiente migliore. Cambridge, con la sua lunga tradizione corroborata da Hardy e Littlewood, era un posto fantastico per assorbire idee nuove. Scoprì che Hardy e Littlewood avevano fatto alcune bellissime congetture sulla frequenza dei numeri primi gemelli, che lo avevano affascinato tanto ai tempi della scuola.

Scoprì anche gli sconcertanti teoremi di Gödel. A scuola, Montgomery aveva imparato come l'edificio matematico si costruisse deducendo teoremi da un insieme accettato di assiomi. Secondo Gödel, tuttavia, per alcuni problemi quella tecnica non avrebbe funzionato. Ci sarebbero sempre state congetture relative ai numeri che non sarebbe mai stato possibile dimostrare partendo dagli assiomi che Montgomery aveva appreso negli anni di scuola. E se si fosse scoperto che per uno dei problemi relativi ai numeri primi che lui inten-

deva affrontare non esistevano soluzioni? Rischiava di passare la vita a inseguire ombre.

Per ampliare i propri orizzonti al di là delle guglie e dei cortili quadrangolari del college di Cambridge, Montgomery decise di trascorrere un anno all'Institute for Advanced Study di Princeton. Lì, ebbe l'opportunità di esprimere i propri timori sul pericolo di finire per cercare di dimostrare l'indimostrabile. Per tradizione, tutti gli ospiti in visita all'istituto, indipendentemente dal loro titolo accademico, sono invitati a cenare con il direttore. Quando il direttore gli chiese su cosa stesse lavorando, Montgomery disse che da un bel po' di tempo si stava interessando alla congettura dei numeri primi gemelli, ma doveva ammettere che i teoremi di Gödel lo turbavano. La risposta del direttore dovette accrescere il nervosismo del giovane matematico: «Bene, perché non chiediamo a Gödel?». Detto fatto, Gödel fu chiamato per dare la sua opinione. Purtroppo per Montgomery, Gödel non poté garantirgli che una cosa come la congettura dei numeri primi gemelli fosse dimostrabile in base agli assiomi attualmente adottati per la teoria dei numeri.

Lo stesso Gödel aveva espresso preoccupazioni analoghe in relazione all'ipotesi di Riemann: forse gli assiomi che costituivano le fondamenta dell'edificio matematico non erano abbastanza ampi per sostenere la dimostrazione richiesta, nel qual caso c'era la possibilità che si continuasse a innalzare l'edificio senza mai trovare una connessione con l'ipotesi. Ma Gödel offriva anche qualche motivo di consolazione. Egli riteneva infatti che qualsiasi congettura davvero interes-

sante non potesse rimanere fuori portata per sempre. Si trattava semplicemente di trovare una nuova pietra angolare con cui estendere la base dell'edificio. Solo ritornando ai fondamenti della disciplina e cercando di ampliarli sarebbe stato possibile costruire la dimostrazione mancante. Se la congettura era una cosa a cui si teneva veramente – se il risultato congetturato era un'estensione naturale di ciò che era già stato dimostrato – allora, pensava Gödel, sarebbe sempre stato possibile trovare una pietra che si inserisse con uguale naturalezza nelle fondamenta esistenti; grazie a questa inserzione sarebbe allora stato possibile dimostrare la congettura. Gödel stesso aveva dimostrato che questo procedimento non avrebbe mai permesso di stabilire la validità di ogni possibile congettura, ma nell'evoluzione permanente delle basi assiomatiche della matematica risiedeva la speranza di catturare un numero sempre maggiore di quei problemi irrisolti.

Montgomery tornò a Cambridge rinfrancato: il suo sogno di comprendere i misteri dell'universo dei numeri non era del tutto vano. Si rimise a studiare il problema della fattorizzazione dei numeri immaginari avanzato da Gauss. Sapeva, da ciò che aveva letto, che esisteva una relazione fra le proprietà del paesaggio di Riemann e i tentativi compiuti da Gauss in quel campo. In particolare, all'inizio del XX secolo l'ipotesi di Riemann aveva avuto un ruolo decisamente paradossale nella dimostrazione di una delle congetture di Gauss sulla fattorizzazione dei numeri immaginari: la cosiddetta congettura del numero di classe.

Nel 1916 un matematico tedesco, Erich Hecke, era riuscito

a dimostrare che se l'ipotesi di Riemann fosse stata vera, allora lo sarebbe stata anche la congettura del numero di classe. Quella di Hecke era una delle tante dimostrazioni «con riserva» che sarebbero emerse nel corso del secolo. Per poterle confermare era necessario raggiungere la vetta del monte Riemann, ottenendo così accesso ai tesori che nascondeva. Nessuna poteva essere definita propriamente una «dimostrazione» finché non fosse stata dimostrata l'ipotesi di Riemann. La svolta paradossale di cui Montgomery era venuto a conoscenza avvenne pochi anni dopo. Tre matematici, Max Deuring, Louis Mordell e Hans Heilbronn, riuscirono a dimostrare che se l'ipotesi di Riemann fosse stata falsa, allora questo fatto avrebbe potuto essere utilizzato per dimostrare che la congettura del numero di classe era corretta. Per quanto incredibile, da due premesse opposte si deduceva una stessa conclusione: l'intuizione di Gauss sulla fattorizzazione dei numeri immaginari era giusta. La dimostrazione «senza riserve» della congettura del numero di classe, in cui si combinavano la dimostrazione di Hecke e quella di Deuring, Mordell e Heilbronn, è una delle applicazioni più strane dell'ipotesi di Riemann.

Adesso Montgomery sapeva quanto sarebbero stati importanti gli zeri di Riemann per attaccare alcuni dei problemi posti da Gauss sulla fattorizzazione dei numeri immaginari. Se fosse riuscito a dimostrare che gli zeri tendevano a raggrupparsi lungo la retta magica di Riemann, era sicuro di poter fare qualche progresso nella generalizzazione dell'acclamato lavoro di Baker. L'idea che uno zero potesse essere seguito quasi immediatamente da un altro si ispirava alla congettura dei nu-

meri primi gemelli, che lo affascinava fin dai tempi della scuola. Sarebbe stato in grado di dimostrare che i punti a livello del mare nel paesaggio di Riemann possono trovarsi uno accanto all'altro, proprio come i numeri primi gemelli che ci si aspetta di incontrare infinite volte? L'esistenza di punti a livello del mare ravvicinati fra loro avrebbe avuto conseguenze importanti per il problema della fattorizzazione dei numeri immaginari. Sarebbe stato quello il primo scalpo di Montgomery, il genere di trofeo con cui ogni studente di dottorato sogna di farsi un nome nello spietato mondo accademico?

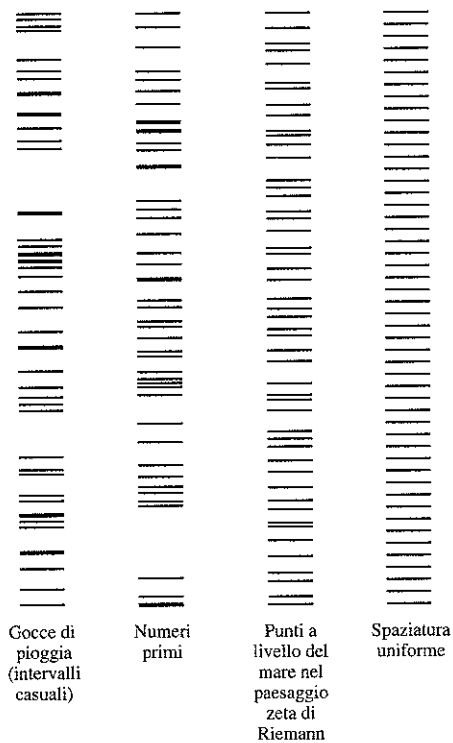
Montgomery stava scommettendo su una distribuzione casuale degli zeri lungo la retta magica di Riemann, una distribuzione che rispecchiava in qualche modo quella dei numeri primi lungo la retta numerica. Dopo tutto, se i numeri primi davano l'impressione di essere stati scelti lanciando una moneta, era ragionevole scommettere che anche gli zeri della funzione zeta fossero distribuiti in modo casuale. La casualità crea invariabilmente dei raggruppamenti, che è poi la ragione per la quale gli autobus arrivano sempre tre alla volta e i numeri vincenti della lotteria sono spesso vicini fra loro. Montgomery sperava di trovare, all'interno di questa distribuzione casuale, dei gruppetti di zeri ravvicinati. Nella sua marcia verso nord lungo la retta critica, Montgomery si aspettava dunque di imbattersi in una serie di piccoli assembramenti di zeri, che avrebbe poi potuto usare per dimostrare alcune cose relative alla fattorizzazione dei numeri immaginari.

Il problema era che gli indizi su cui basarsi erano molto scarsi. Gli zeri di cui era stata calcolata la posizione non sa-

rebbero stati sufficienti a rendere visibile nemmeno uno di quegli assembramenti. Perciò Montgomery dovette far ricorso a un approccio indiretto. In assenza di indizi sperimentali, esisteva qualche aspetto della teoria che indicasse una tendenza degli zeri a raggrupparsi? Il metodo che Montgomery escogitò era un'ingegnosa inversione del ruolo solitamente interpretato dagli zeri. La formula esplicita che Riemann aveva scoperto utilizzando il paesaggio zeta esprimeva un collegamento diretto fra i numeri primi e gli zeri. Essa era intesa come un modo per comprendere i numeri primi attraverso l'analisi degli zeri. Montgomery non fece altro che ribaltare l'equazione: avrebbe usato le conoscenze sui numeri primi per dedurre il comportamento degli zeri lungo la retta magica di Riemann. Ricordava che Hardy e Littlewood avevano fatto una stima della frequenza con cui i primi gemelli avrebbero dovuto presentarsi quando si passava in rassegna la sequenza dei numeri primi. Forse sarebbe riuscito a estendere quella stima al comportamento degli zeri. Ma quando la inserì nella formula esplicita di Riemann, scoprì con sorpresa e delusione che la stima di Hardy e Littlewood non prediceva affatto l'esistenza di assembramenti di zeri.

Montgomery si mise ad analizzare quella predizione in dettaglio. Essa sembrava indicare che quando si procedeva verso nord lungo la retta di Riemann, gli zeri – a differenza dei numeri primi – tendessero a respingersi. Montgomery si rese presto conto che gli zeri non amavano affatto stare vicini. Al contrario di quanto accadeva con i numeri primi, a uno zero non seguivano mai altri zeri in rapida successione.

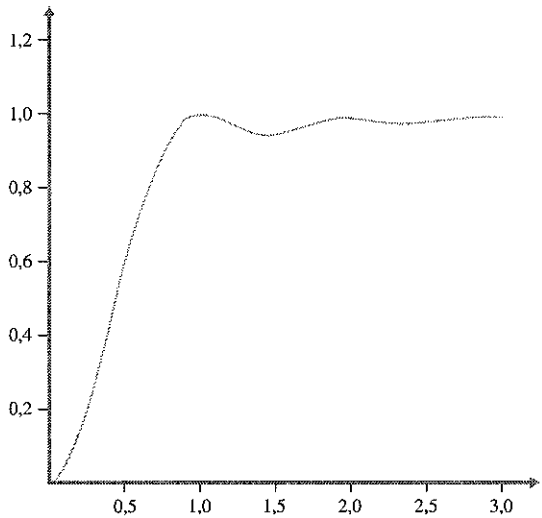
Di fatto, i risultati ottenuti da Montgomery suggerivano la possibilità che gli zeri si distribuissero in maniera totalmente uniforme lungo la retta di Riemann, in netto contrasto con la distribuzione casuale che egli si era aspettato di trovare.


Gocce di pioggia (intervalli casuali)
Numeri primi
Punti a livello del mare nel paesaggio zeta di Riemann
Spaziatura uniforme

Gli intervalli che separano gocce di pioggia, numeri primi e zeri di Riemann.

Montgomery cercava un modo per descrivere la sua stima dell'andamento delle distanze che separano i punti a livello del mare. Per rappresentare il campo di variazione teorico della distanza fra zeri adiacenti, costruì un diagramma che prende il nome di grafico di correlazione di coppia (vedi la figura nella pagina a fianco). La curva che ottenne era diversa da qualsiasi altra gli fosse mai capitato di vedere. Non assomigliava per nulla a quella che si ottiene, per esempio, quando si riportano su un diagramma le differenze d'altezza fra gruppi di persone scelte a caso, che è affine alla classica curva a campana di una distribuzione gaussiana.

Il grafico di Montgomery riporta il numero degli zeri che dovrebbe esserci per ogni possibile distanza che separa una coppia. La prima parte del grafico mostra che gli zeri non amano stare vicini, dato che l'altezza della curva si mantiene molto bassa. Montgomery riteneva che nella parte destra del grafico si sarebbe insinuato un andamento ondulato, indice di una distribuzione statistica insolita e distintiva. Egli non poteva dimostrare che l'andamento delle distanze fra gli zeri sarebbe effettivamente proseguito in quel modo, né possedeva abbastanza valori calcolati delle posizioni degli zeri per verificare sperimentalmente la correttezza della propria predizione. Il suo strano grafico si basava esclusivamente sulla congettura di Hardy e Littlewood relativa alla distribuzione dei numeri primi gemelli. Il grafico, tuttavia, non si rivelò così nuovo come Montgomery aveva ritenuto all'inizio.



Il grafico di Montgomery. Sull'asse orizzontale è riportata la distanza fra coppie di zeri, mentre l'asse verticale misura il numero di coppie per ogni data distanza.

Poiché aveva sperato di scoprire che gli zeri erano ravvicinati, Montgomery giudicò il proprio lavoro una sorta di fallimento. Aveva progettato di usare quei piccoli assembramenti di zeri sulla retta critica di Riemann per dare una risposta ad alcune delle questioni irrisolte sulla fattorizzazione dei numeri immaginari poste da Gauss. Ma aveva ottenuto il risultato opposto. Se la sua nuova congettura fosse stata giusta, se agli zeri piaceva respingersi, allora la ricerca di Montgomery non sarebbe servita a far luce sulle idee da

cui era partito. Ma quando si intraprende un viaggio non si sa mai dove si andrà a finire. Come gli aveva detto una volta Littlewood a Cambridge, «non aver paura di lavorare su problemi difficili perché lungo il percorso può capitarti di risolvere qualcosa di interessante». Littlewood lo aveva imparato a proprie spese quando, studente di dottorato, si era visto affidare dal suo ignaro *tutor* il compito di risolvere l'ipotesi di Riemann.

Montgomery si era imbattuto in quell'inattesa distribuzione delle distanze che separano gli zeri nell'autunno del 1971. Nel marzo del 1972 aveva sostenuto la sua tesi di dottorato e aveva accettato un incarico all'università del Michigan, dove oggi è professore. Pensava ancora che le sue idee fossero autenticamente nuove e interessanti, ma gli rimaneva un grosso dubbio. Sapeva che Atle Selberg era diventato una sorta di moderno Gauss. «Selberg aveva molti lavori non pubblicati, e c'era sempre il pericolo che dicesse: "Oh sì, questo lo so da molti anni".» Proprio come le nuove scoperte annunciate da Legendre si erano rivelate vecchi risultati che Gauss aveva annotato anni prima in manoscritti inediti, spesso i matematici moderni scoprono che Selberg li ha anticipati. Dopo essere stato scottato dai rapporti avuti con Erdős per la dimostrazione elementare del teorema dei numeri primi, Selberg lavorava in assoluta solitudine sulle proprie idee nel campo della teoria dei numeri, e molte di quelle idee non erano mai state pubblicate.

Così, mentre si recava a un convegno dedicato alla teoria

dei numeri, nella primavera del 1972 Montgomery decise di fare tappa a Princeton per parlare delle sue scoperte a Selberg. C'era qualcos'altro che lo angustiava: «Ero un pochino preoccupato perché pensavo che ci fosse un messaggio in ciò che avevo fatto, e non sapevo quale messaggio fosse». Tuttavia, non era Selberg la persona che avrebbe aiutato Montgomery a interpretare quel messaggio, ma un altro membro della potente «mafia» di Princeton.

Dyson, il principe ranocchio della fisica

Il fisico inglese Freeman Dyson si fece un nome subito dopo la guerra fornendo il proprio sostegno a un giovane scienziato dallo spirito indipendente: Richard Feynman. Dopo essersi laureato a Cambridge, Dyson vinse una borsa di studio alla Cornell University. Lì conobbe il giovane Feynman, che stava elaborando un'interpretazione assolutamente unica e personale della fisica quantistica. All'inizio molti ignorarono quello che Feynman aveva da dire perché non capivano il suo linguaggio. Dyson colse le potenzialità della prospettiva di Feynman e lo aiutò ad articolare in modo più chiaro le sue idee rivoluzionarie. Oggi gli strumenti sviluppati da Feynman sono alla base di gran parte dei calcoli che i fisici delle particelle compiono. Se non fosse stato per le capacità interpretative di Dyson, forse quegli strumenti sarebbero andati perduti per sempre.

La fisica non era stata la prima cosa a catturare l'imma-

ginazione di Dyson. Egli veniva da una famiglia con una forte tradizione musicale ma poco interesse per la scienza. A scuola, tuttavia, lo stregarono le inebrianti melodie della matematica. Rimase affascinato dalla teoria delle partizioni di Ramanujan dopo aver vinto una copia di uno dei libri che Hardy aveva dedicato alla teoria dei numeri. «Nei quarant'anni che sono trascorsi da quel fausto giorno, non ho mai smesso di tornare a visitare il giardino di Ramanujan. E ogni volta vi trovo dei fiori freschi, appena sbocciati. Questa è la cosa più incredibile di Ramanujan. Ha scoperto un'enorme quantità di cose eppure ne ha lasciate altrettante nel suo giardino affinché altri le potessero scoprire.»

Secondo Dyson, benché esplorino tutti il medesimo terreno, gli scienziati si dividono in due categorie: gli uccelli e i ranocchi. Gli uccelli veleggiano alti sopra il loro campo, abili a cogliere le grandiose connessioni che attraversano il paesaggio; i ranocchi passano il tempo a sguazzare nel fango e a nuotare in un piccolo stagno con cui acquistano una grande familiarità. La matematica era una tipica disciplina per gli uccelli, ma Dyson si considerava un ranocchio, e questo lo indusse a occuparsi delle questioni concrete della fisica.

Grazie al suo successo nel promuovere la fisica quantistica di Feynman, Dyson attrasse l'attenzione del direttore dell'Institute for Advanced Study di Princeton, Robert Oppenheimer, il fisico che era stato a capo del programma nucleare statunitense durante la Seconda guerra mondiale. Nel

1953 Dyson accettò l'offerta fattagli da Oppenheimer e assunse un incarico permanente presso l'istituto. A dispetto del suo tono di voce sommesso e del suo carattere discreto, le opinioni schiette di Dyson lo aiutarono ad affermarsi al di fuori dei circoli accademici. Divenne famoso per le sue speculazioni sulla possibile esistenza di civiltà extraterrestri. La grande ammirazione di cui godeva fra un pubblico affascinato dal cosmo crebbe negli anni Cinquanta e Sessanta, quando egli lavorò al Progetto Orione, in cui si avanzava l'idea di costruire astronavi in grado di portare l'uomo su Marte e su Saturno.

Benché avesse trascorso l'anno accademico 1970-1971 presso l'Institute for Advanced Study, quando aveva incontrato Gödel per la prima volta, Montgomery aveva avuto pochi contatti con i fisici. I tanti teorici dei numeri di Princeton erano più che sufficienti per tenerlo occupato. Ma, come egli stesso ricorda, «conoscevo Dyson di vista. Era quel tipo di conoscenza fatta di cenni del capo e di sorrisi, anche se dubito che lui sapesse chi fossi. Io sapevo chi era perché durante la Seconda guerra mondiale si era occupato di teoria dei numeri a Londra».

Nella primavera del 1972, quando decise di fare tappa a Princeton mentre si recava a un convegno sulla teoria dei numeri, Montgomery trascorse la giornata a spiegare le proprie idee a Selberg e ad alcuni dei teorici dei numeri che erano in visita all'istituto. Arrivato il momento, il lavoro era stato interrotto per un rituale che si osserva scrupolosamente in moltissimi dipartimenti di matematica: il tè del

pomeriggio. L'ora del tè rappresenta da sempre un'occasione importante a Princeton, perché permette a persone che si occupano di discipline diverse di scambiare le proprie idee. Montgomery stava chiacchierando con uno dei teorici dei numeri che avevano assistito alla sua conferenza informale, Saravadam Chowla. Chowla era uno studente di Littlewood che era fuggito in America nel 1947, quando, con la fondazione dei due nuovi Stati dell'India e del Pakistan, la sua città natale, Lahore, era diventata pakistana. Divenne un assiduo visitatore dell'istituto, dove si guadagnò la simpatia dei membri permanenti con la sua personalità esuberante e il suo buon umore. Mentre chiacchierava con Montgomery, il matematico indiano notò Dyson dall'altra parte della stanza.

«Chowla disse: "Conosce Dyson?" e io risposi di no. "Lasci che la presenti." Dissi di no.» Ma Chowla era famoso per non considerare «no» una risposta: è la sola persona che sia riuscita a costringere Selberg a scrivere un articolo in collaborazione. «Chowla fu molto insistente, e mi trascinò fin da Dyson per presentarmi. Io ero imbarazzato, non volevo seccare Dyson, ma lui fu molto cordiale e mi chiese su cosa stessi lavorando.» Montgomery cominciò a parlare di quello che pensava potesse essere il comportamento degli intervalli che separano coppie di zeri. Non appena menzionò il suo grafico di distribuzione di quegli intervalli, gli occhi di Dyson si illuminarono: «Ma è esattamente lo stesso comportamento degli autovalori delle matrici casuali hermitiane!».

Dyson spiegò rapidamente a Montgomery che quelle entità matematiche dal nome esotico venivano usate dai fisici quantistici per predire i livelli energetici nel nucleo di un atomo pesante quando lo si bombarda con neutroni a bassa energia. Dyson, che era all'avanguardia in quelle ricerche, segnalò a Montgomery alcuni degli esperimenti che erano stati compiuti per registrare quei livelli energetici. E infatti, quando Montgomery andò a guardare quali fossero gli intervalli fra i livelli energetici nel nucleo dell'atomo di erbio, il sessantottesimo elemento della tavola periodica, notò qualcosa di straordinariamente familiare. Prendendo una sequenza degli zeri di Riemann e mettendola accanto a quei livelli energetici misurati per via sperimentale, poteva vedere immediatamente una misteriosa somiglianza. Sia gli intervalli fra gli zeri sia quelli fra i livelli d'energia si susseguivano in maniera molto più ordinata che se fossero stati scelti a caso.

Montgomery era incredulo. Le configurazioni che lui prevedeva nella distribuzione degli zeri erano identiche a quelle che i fisici quantistici stavano scoprendo nei livelli energetici dei nuclei di atomi pesanti. Erano configurazioni così caratteristiche che quella forte somiglianza non poteva essere il frutto di una coincidenza. Ecco qual era il messaggio che Montgomery stava cercando: forse la matematica insita nei livelli quantistici d'energia nei nuclei degli atomi pesanti è la stessa matematica che determina le posizioni degli zeri di Riemann.

La matematica che spiega questi livelli energetici risale al-

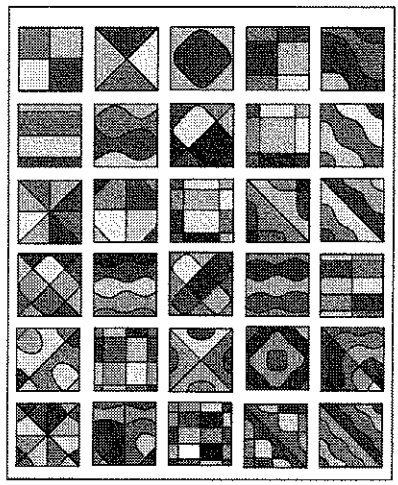
la scoperta che diede inizio allo sviluppo della fisica quantistica nel XX secolo. Le particelle elementari come gli elettroni e i fotoni hanno due caratteristiche apparentemente contraddittorie. Da un lato si comportano in modo molto simile a minuscole palle da biliardo. Ma allo stesso tempo gli esperimenti rivelavano una natura diversa, che poteva essere spiegata solo considerando quelle «particelle» fondamentali come onde. La fisica quantistica nacque dai tentativi della scienza di spiegare questo sdoppiamento subatomico della personalità: la dualità onda-particella.

Tamburi quantistici

All'inizio del XX secolo emerse un'immagine dell'atomo simile a quella di un sistema solare in miniatura costituito da particelle invisibili. Il sole al centro di questo minuscolo sistema solare fu chiamato nucleo; in seguito i fisici avrebbero scoperto che quel nucleo era a sua volta formato da particelle chiamate protoni e neutroni. Attorno al nucleo orbitavano gli elettroni, i pianeti della struttura atomica. I progressi teorici e gli esperimenti costrinsero presto i fisici a ripensare quel modello. Cominciavano a rendersi conto che l'atomo, più che come un sistema planetario, si comportava come un tamburo. Le vibrazioni che si creano quando si percuote un tamburo sono composte da alcune forme d'onde fondamentali, ognuna con una propria frequenza caratteristica. In teoria ci sono infinite frequenze

possibili, e il suono del tamburo è in effetti una combinazione di queste frequenze diverse. A differenza delle armoniche prodotte da una corda di violino, il rumore del tamburo è una miscela molto più complessa di frequenze che sono determinate dalla forma dello strumento, dalla tensione della pelle di tamburo, dalla pressione esterna dell'aria e da altri fattori. La complessità delle varie forme d'onda prodotte da un tamburo spiega perché molti degli strumenti a percussione di un'orchestra non producono note identificabili.

Esiste un modo per visualizzare la complessità delle vibrazioni che compongono il suono di un tamburo. Uno scienziato del XIX secolo, Ernst Chladni, escogitò un esperimento che era solito eseguire davanti alle corti d'Europa. (Napoleone rimase particolarmente colpito dalla sua dimostrazione e gli donò seimila franchi.) Per rappresentare il tamburo Chladni utilizzava una lastra di metallo quadrata. Quando la percuoteva, la lastra emetteva un orribile suono metallico, ma facendola abilmente vibrare con un archetto di violino, Chladni riusciva a isolare ogni singola frequenza. Ricoprendo la lastra con un sottile strato di sabbia, egli mostrava al suo pubblico i diversi tipi di vibrazioni che ciascuna frequenza di base produceva nel metallo. La sabbia si raccoglieva nelle zone della lastra che non vibravano e sulla sua superficie comparivano strane forme regolari. Ogni volta che Chladni faceva vibrare la lastra con un nuovo colpo dell'archetto, nella sabbia compariva una nuova forma, manifestazione di una nuova frequenza.



Alcuni degli strani modi di vibrazione di una lastra di metallo con cui Chladni intrattenne Napoleone.

Negli anni Venti del Novecento i fisici compresero che la matematica che descrive le frequenze del suono emesso da un tamburo poteva essere usata anche per calcolare i caratteristici livelli energetici a cui vibrano gli elettroni in un atomo. In questo senso, atomo e tamburo sono fisicamente equivalenti: forze presenti nell'atomo controllano le vibrazioni delle particelle subatomiche, proprio come la tensione della membrana di pelle o la pressione dell'aria governano le vibrazioni che vanno a formare il suono del tamburo. Ciascun atomo era come una delle lastre di Chladni. Nell'atomo gli elettroni vibrano solo in modi ben definiti, come

quelli resi visibili da Chladni. Quando un elettrone viene eccitato, comincia a vibrare a una nuova frequenza, proprio come Chladni poteva creare nuove forme nella sabbia sparsa sulle sue lastre usando un archetto di violino. Ciascun atomo della tavola periodica ha un proprio caratteristico insieme di frequenze a cui i suoi elettroni prediligono vibrare. Queste frequenze sono le impronte digitali degli atomi, che i fisici sfruttano per identificare con gli spettroscopi le specie atomiche presenti nelle sostanze.

Per dar conto delle figure – o forme d'onda – che compaiono sulla superficie di un tamburo, era stata sviluppata una teoria matematica. La teoria risale all'*equazione d'onda* di Eulero. Basta inserirvi le proprietà fisiche del tamburo – la sua forma, la tensione della membrana, la pressione dell'aria circostante – e le soluzioni dell'equazione forniscono le forme d'onda possibili. La fisica dell'atomo differisce da quella del tamburo per il fatto che coinvolge i numeri immaginari. Perciò, per risolvere le equazioni che dettano il comportamento dell'atomo, i fisici si videro costretti a entrare nel mondo intangibile dei numeri immaginari. E sono i numeri immaginari che danno alla fisica dei quanti il suo strano carattere probabilistico.

Nel nostro mondo ordinario, macroscopico, possiamo compiere misure senza influire su ciò che stiamo misurando. Quando usiamo un cronometro, non rallentiamo gli atleti di cui stiamo prendendo i tempi; quando misuriamo dove è caduto un giavellotto, non alteriamo la lunghezza del lancio. Come osservatori, noi siamo indipendenti dal sistema che

stiamo misurando. Ma nel mondo microscopico le cose sono diverse. Quando osserviamo un elettrone interagiamo con esso, modificando invariabilmente il suo comportamento.

La fisica quantistica cerca di spiegare quello che accade a una particella prima che entri in gioco l'osservatore. Finché non la osserviamo nel nostro mondo macroscopico, la realtà quantistica esiste solo nel mondo dei numeri immaginari. Sono i numeri immaginari che spiegano le osservazioni apparentemente inspiegabili dalla nostra prospettiva macroscopica. Per esempio, finché non lo si osserva, sembra che un elettrone possa essere in due posti diversi allo stesso tempo, o che possa vibrare a molte frequenze diverse, a cui corrispondono diversi livelli energetici. Quando osserviamo un evento che accade nel mondo quantistico, è come se vedessimo non l'evento stesso nel suo dominio naturale, ma un'ombra dell'evento proiettata nel nostro mondo «reale» di numeri ordinari. L'atto dell'osservazione riduce il mondo bidimensionale dei numeri immaginari alla linea unidimensionale dei numeri ordinari. Prima che lo osserviamo, un elettrone vibrerà, come un tamburo, in base a una combinazione di frequenze diverse. Ma quando lo osserviamo non è come quando ascoltiamo il suono di un tamburo e sentiamo tutte le frequenze contemporaneamente; tutto quello che percepiamo è l'elettrone che vibra a una singola frequenza.

Due dei personaggi chiave per l'esplorazione del nuovo mondo dei quanti furono i fisici di Gottinga Werner Heisenberg e Max Born. Guardando fuori della finestra del suo ufficio, Hilbert poteva vederli spesso camminare avanti e

indietro sui prati all'esterno del dipartimento di matematica, immersi nella discussione, impegnati a costruire il modello atomico del XX secolo. Hilbert cominciò a chiedersi se le posizioni degli zeri nel paesaggio di Riemann non potessero essere spiegate dalla matematica delle vibrazioni che Heisenberg stava elaborando per spiegare i livelli energetici nell'atomo. Ma all'epoca c'era ben poco su cui basarsi. Le scoperte di Montgomery rilanciarono l'idea di Hilbert secondo cui la migliore opportunità di comprendere gli zeri di Riemann sarebbe venuta dalla matematica dei tamburi quantistici che proprio allora Born e Heisenberg stavano creando per spiegare i livelli energetici. La combinazione di numeri immaginari e di onde dava origine a un caratteristico insieme di frequenze che faceva pensare a dei tamburi quantistici piuttosto che a un'orchestra classica. Ma come Montgomery sarebbe venuto a sapere da Dyson durante il loro breve incontro a Princeton, le frequenze caratteristiche che si accordavano meglio con la posizione degli zeri di Riemann provenivano da alcuni degli atomi più complessi dell'orchestra quantistica.

Un ritmo avvincente

Il primo atomo che i fisici quantistici riuscirono ad analizzare fu l'idrogeno. Un atomo di idrogeno è un tamburo di tipo molto semplice: un elettrone che orbita attorno a un protone. E le equazioni che determinano le frequenze o i livelli

energetici di questo elettrone e di questo protone sono abbastanza semplici da poter essere risolte esattamente. Le frequenze di quell'unico elettrone hanno molto in comune con le armoniche prodotte da una corda di violino. Ma se i fisici quantistici ebbero successo con l'idrogeno, non appena tentarono di procedere lungo la tavola periodica scoprirono che descrivere il tamburo quantistico in modo preciso era un compito impossibile. Quanti più erano i protoni e i neutroni presenti nel nucleo, e quanti più gli elettroni orbitanti, tanto più crescevano le difficoltà. Giunti ai 92 protoni e ai 146 neutroni che formano il nucleo dell'uranio 238, i fisici brancolavano letteralmente nel buio. Il problema più difficile era determinare i possibili livelli energetici del nucleo, il sole al centro del sistema solare atomico. Decifrare la forma del tamburo matematico che determinava questi livelli energetici nucleari era semplicemente troppo complicato. Anche se i fisici fossero riusciti a determinare quali tamburi matematici producevano i livelli energetici, quei tamburi erano così complessi che sarebbe stato impossibile individuare le loro frequenze.

Fu solo negli anni Cinquanta che si trovò un modo per analizzare quelle intricatissime strutture. Invece di cercare di stabilire i valori precisi di ogni singolo livello energetico, Eugene Wigner e Lev Landau decisero di studiarne l'andamento statistico: fecero con i livelli energetici quello che Gauss aveva fatto con i numeri primi. Gauss aveva spostato la propria attenzione dal tentativo di predire la posizione precisa di un numero primo nella sequenza a una stima del numero

di numeri primi che si sarebbero incontrati in media man mano che si procedeva a contare. Allo stesso modo, Wigner e Landau sostenevano l'opportunità di un approccio meno rigido allo studio dei livelli energetici dell'atomo. L'analisi statistica avrebbe rivelato le probabilità di trovare, in una piccola area dello spettro di tutte le frequenze, i livelli energetici di un particolare nucleo.

Il nucleo dell'uranio era così complicato che esisteva un numero enorme di possibili equazioni con le quali determinare i livelli energetici in base allo stato in cui si trovava l'uranio. Perciò c'erano poche speranze di poter stimare i valori statistici dei livelli energetici se quei valori fossero cambiati in modo drastico quando cambiava lo stato del nucleo. Poiché i livelli energetici venivano determinati analizzando tamburi quantistici, Wigner e Landau decisero di verificare se la distribuzione delle frequenze variava in modo incontrollato quando si cambiava la forma dei tamburi. Fortunatamente, risultò che per gran parte dei tamburi questo non accadeva. Wigner e Landau scoprirono che quando sceglievano dei tamburi quantistici a caso, le frequenze specifiche potevano cambiare, ma non mutavano i valori statistici delle frequenze. In media, insomma, quasi tutti i tamburi quantistici si comportavano allo stesso modo. Ma il nucleo di un atomo pesante si comportava come un tamburo quantistico medio? Wigner e Landau ritenevano che nulla rendesse i tamburi che descrivevano, per esempio, il nucleo dell'uranio, differenti dalla maggior parte dei tamburi quantistici.

L'intuizione di Wigner e Landau era esatta. Quando con-

frontarono i valori statistici dei livelli energetici di un tamburo quantistico scelto a caso con quelli dei livelli energetici osservati negli esperimenti, trovarono una concordanza eccellente. In particolare, quando guardarono gli intervalli che separavano i livelli energetici in un nucleo di uranio, sembrava che i livelli energetici si respingessero. È per questo che Freeman Dyson si era eccitato durante il breve incontro con Montgomery a Princeton: il grafico che Montgomery gli aveva mostrato aveva l'impronta peculiare della descrizione statistica dei livelli energetici. Ma Montgomery aveva portato alla luce quella strana configurazione in un'area della scienza che sembrava non c'entrare nulla.

Dunque la domanda successiva che bisognava porsi era perché mai quelle due entità – livelli energetici e zeri di Riemann – avessero qualcosa in comune, e che cosa fosse ad accomunarle. Montgomery dovette provare lo stesso stupore di un archeologo che scopre due dipinti paleolitici identici in grotte situate a estremità opposte del mondo. Doveva assolutamente esserci un legame. Montgomery riconosce che la sua conversazione con Dyson fu probabilmente una delle coincidenze più fortuite nella storia della scienza: «Fu per pura serendipità che mi trovai lì, proprio nel posto giusto». Fin dai tempi di Galileo e Newton, spesso la fisica e la matematica si muovono su un territorio simile, ma nessuno si sarebbe potuto aspettare che la teoria dei numeri di Riemann e la fisica quantistica fossero così intimamente legate. I tentativi di Montgomery di comprendere la fattorizzazione dei numeri immaginari non erano approdati a nulla, ma egli si

era imbattuto in qualcosa di molto più interessante. «Se si considerano i progetti di ricerca falliti, questo fu migliore di tantissimi altri» ammette sorridendo Montgomery.

Che cosa significavano per l'ipotesi di Riemann queste rivelazioni nate durante la pausa per il tè a Princeton? Se i punti a livello del mare nel paesaggio di Riemann potevano essere spiegati dalla matematica dei livelli energetici in fisica, allora si profilava l'eccitante prospettiva di riuscire a dimostrare perché i punti a livello del mare giacciono su una linea retta. A uno zero che cade fuori della retta corrisponderebbe un livello energetico immaginario, cioè una cosa che le equazioni della fisica quantistica vietano. Fino ad allora non c'era mai stata una speranza altrettanto fondata di fornire una spiegazione di qualche sorta per l'ipotesi di Riemann.

Mentre erano stati condotti degli esperimenti per confermare il modello dei livelli energetici in atomi pesanti proposto da Wigner e Landau, Montgomery non aveva ancora avuto alcuna conferma sperimentale del fatto che i punti a livello del mare nel paesaggio di Riemann si comportassero come lui pensava dovessero fare in base alla teoria. Nessuno aveva verificato che gli zeri si respingessero realmente, come lui suggeriva. Il problema era che le regioni del paesaggio di Riemann in cui era probabile che comparissero questi andamenti statistici si trovavano ben fuori della portata dei calcoli che Montgomery poteva effettuare.

A Cambridge, Montgomery era venuto a conoscenza delle scoperte fatte da Littlewood riguardo all'impossibilità

di osservare i veri colori dei numeri primi a meno di non spingersi nei più remoti recessi dell'universo numerico. Littlewood aveva dimostrato teoricamente che in qualche caso la formula di Gauss per il calcolo del numero di numeri primi avrebbe dovuto fornire delle sottostime, ma nessuno era riuscito a confermare quel fatto sperimentalmente. Montgomery si stava rassegnando a quel destino. C'era voluto un certo tempo prima che i fisici sperimentali realizzassero acceleratori di particelle in grado di generare un'energia sufficiente a confermare le predizioni teoriche di Wigner e Landau. Montgomery temeva che i matematici non sarebbero mai riusciti a calcolare numeri tanto grandi da permettere di verificare se gli zeri situati in zone remote della retta critica seguissero effettivamente l'andamento teorico da lui previsto.

Ma Montgomery non aveva considerato le grandi capacità di calcolo di Andrew Odlyzko e del supercomputer Cray di cui disponeva al laboratorio di ricerca dell'AT&T, nel cuore del New Jersey. Odlyzko era venuto a conoscenza della predizione teorica di Montgomery sugli intervalli che separano gli zeri e del parallelo con i tamburi casuali nascosti nei livelli energetici dei nuclei atomici pesanti. Quello era proprio il genere di sfida che lo affascinava. Odlyzko cominciò ad andare a caccia di zeri a una distanza di 10^{12} unità lungo la retta magica di Riemann. Se immaginiamo che la mappa del paesaggio di Riemann sia centrata sul New Jersey e facciamo corrispondere a ciascuna unità lungo la retta critica la distanza di un centimetro, allora

Odlyzko stava esaminando aree della retta magica di Riemann che si trovavano a una distanza pari a venticinque volte quella della Luna. Una volta che il supercomputer Cray avesse sfornato centomila zeri circa, Odlyzko sarebbe stato in grado di esaminare i valori statistici degli intervalli che li dividevano. A metà degli anni Ottanta, era pronto a pubblicare i risultati dei suoi calcoli. La spaziatura fra gli zeri nel paesaggio di Riemann mostrava effettivamente una certa somiglianza con quella dei livelli energetici negli atomi pesanti, ma era evidente che la corrispondenza non era perfetta. Quella concordanza non avrebbe mai soddisfatto uno statistico. Dunque Montgomery si sbagliava? Oppure Odlyzko avrebbe dovuto proseguire le sue ricerche ancora più a nord?

Per nulla intimidito dall'enormità del compito, Odlyzko decise di spingersi fino a 10^{20} passi verso nord. Se consideriamo la nostra ipotetica mappa centrata sul New Jersey, ora Odlyzko stava esplorando regioni poste a cento anni luce dalla Terra, una distanza ben maggiore di quella di Vega, la stella da cui, nel romanzo *Contact* di Carl Sagan, giungeva la misteriosa sequenza di numeri primi. Nel 1989 Odlyzko riportò su un grafico gli intervalli che separavano gli zeri e li mise a confronto con i valori previsti da Montgomery. Questa volta la corrispondenza era sbalorditiva. Era la prova convincente di una nuova proprietà degli zeri. Da quelle distanze siderali gli zeri inviavano un messaggio molto chiaro: a produrli era un complicato tamburo matematico.

Magia matematica

Quanto era significativa la concordanza statistica scoperta da Andrew Odlyzko? Forse era possibile ottenere quegli stessi dati statistici usando della matematica che non c'entrava nulla. Odlyzko ci stava indicando la direzione giusta oppure ci stava mandando ad acchiappar farfalle?

Per rispondere a queste domande, non c'è niente di meglio che rivolgersi a Persi Diaconis, statistico della Stanford University e maestro nello smontare presunti fenomeni paranormali; Diaconis è l'uomo che ha contribuito a smascherare la montatura del «Codice Genesi», la pretesa scoperta di messaggi e profezie celati nel testo della Bibbia. Davanti ai dati di Riemann, Diaconis riconosce che avrebbe difficoltà a trovare una concordanza statistica migliore. «Mi occupo di statistica da una vita, e non ho mai visto dati che si accordino tanto perfettamente.» Diaconis sa benissimo che ciò che appare valido da un certo angolo deve essere esaminato da tutte le altre prospettive per avere la certezza che qualche imperfezione rivelatrice non sia stata abilmente occultata. Diaconis è un maestro in questo genere di trucchi: da principio fu la magia, non la matematica, a catturare la sua immaginazione.

Quando da bambino, a New York, Diaconis marinava la scuola, trascorreva tutto il tempo a bighellonare nei negozi di magia. La sua destrezza attrasse l'attenzione dei uno dei più grandi illusionisti d'America, Dai Vernon. Diaconis racconta che Vernon, che allora aveva sessantotto anni, gli offrì

di unirsi a lui come assistente nei suoi spettacoli itineranti: «Domani parto per il Delaware, vuoi venire?». Il quattordicenne Persi riempì una sacca e partì senza dir nulla ai genitori. Trascorsero i due anni seguenti viaggiando per il Paese:

> Eravamo come Oliver Twist e Fagin. Quella dei maghi è una comunità molto solidale. Non ha nulla a che vedere con baracconi da fiera o cose del genere; è tutta gente della buona borghesia, che lo fa per passione. I maghi sono affascinati dai giocatori d'azzardo. Vernon e io andavamo a scovare i bari, e se venivamo a sapere di un eschimese che riusciva a estrarre la seconda carta [invece della prima] da un sabot con i guanti da neve, partivamo per l'Alaska. Erano avventure di quel genere. Lo facemmo per due anni, seguendo il vento. Frequentando i giocatori, si sentiva parlare continuamente di probabilità. Io ne rimasi affascinato e volli saperne di più.

Durante i suoi viaggi, Diaconis cominciò a leggere libri sulla matematica della probabilità. Come già era successo in altre occasioni, fu l'influenza decisiva di un libro in particolare ad avviare la carriera di uno dei matematici più affascinanti del nostro tempo. Gli fu dato *An Introduction to Probability Theory and its Applications* di William Feller, uno dei testi universitari classici sulla disciplina. Digiuno com'era di analisi matematica, Diaconis non sapeva da dove cominciare. Decise che l'unico modo per fare progressi era iscriversi ai corsi serali del City College di New York. L'interesse divenne passione. In due anni e mezzo Diaconis si era laureato e non

vedeva l'ora di iscriversi a un corso di dottorato. Harvard scommise su quello studente poco convenzionale, che da allora non si è più fermato.

Diaconis rimane fedele alle sue radici di illusionista e riconosce che le due arti hanno molto in comune.

> Il modo in cui faccio matematica è molto simile alla magia. In tutt'e due le discipline hai un problema che devi cercare di risolvere rispettando dei vincoli. In matematica sono i limiti di un'argomentazione logica costruita con gli strumenti che hai a disposizione, e nel caso della magia significa usare i tuoi strumenti e la tua destrezza per produrre un certo effetto senza che il pubblico si renda conto di quello che stai facendo. Il processo intellettivo nei due campi è quasi lo stesso. Una cosa che distingue magia e matematica è la competizione. In matematica la competizione è molto più dura che nel mondo della magia.

Come statistico, Diaconis è interessato al problema di stabilire se qualcosa è casuale oppure no. Finì sulla prima pagina del «New York Times» per la sua analisi del mescolamento delle carte da gioco. Secondo Diaconis, sono necessarie sette scozzate a un giocatore medio per disporre le carte in un ordine casuale. Ma questo è vero nel caso di un giocatore medio che compia scozzate medie. Le cose cambiano notevolmente se colui che mescola le carte ha le mani magiche di Diaconis. Molti dei suoi trucchi si basano sulla capacità di compiere la scozzata perfetta. Egli sa che otto scozzate perfette di fila ri-

portano le carte nella loro disposizione iniziale, benché il pubblico sia convinto che siano in un ordine casuale. È particolarmente abile a capire se un mazzo di carte mescolato è stato «corretto». Diaconis si è fatto una tale reputazione con la sua abilità di individuare regolarità dove gli altri vedono solo caos, che è stato assunto a Las Vegas per controllare che le macchine elettroniche con cui si mescolano le carte da gioco non rivelino nulla al giocatore dalla vista lunga.

Persi Diaconis, professore della Stanford University.

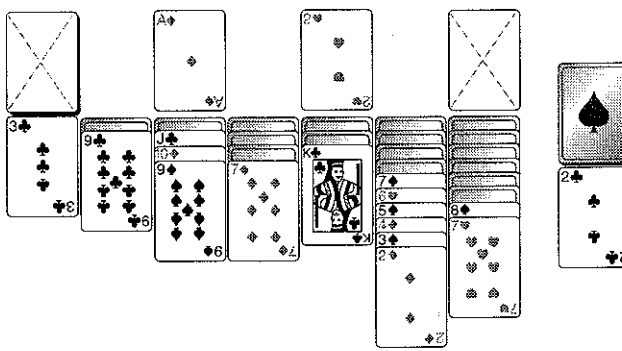
Diaconis fu molto incuriosito quando il tam-tam dei teorici dei numeri gli portò la notizia delle affermazioni di Montgomery e Odlyzko secondo cui gli zeri del paesaggio di Riemann avevano lo stesso aspetto delle frequenze di un tamburo quantistico. Se c'era qualcuno attrezzato per indivi-

duare un eventuale abbaglio, quello era lui. «Perciò chiamai Odlyzko Andrew e gli dissi che volevo degli zeri. Me ne diede più o meno cinquantamila, tutti per me, a partire da circa 10^{20}.» Diaconis provò un nuovo metodo di verifica che aveva scoperto mentre era all'AT&T per lavorare sulla codifica delle conversazioni telefoniche. «Feci il pelo e il contropelo agli zeri, e scoprii che si accordavano perfettamente con le previsioni teoriche.» Questa era un'ulteriore conferma del fatto che gli zeri derivano dai colpi di un tamburo matematico casuale le cui frequenze si comportano come i livelli energetici della fisica quantistica. Per Diaconis, i nessi fra numeri primi e livelli d'energia non sono un maligno inganno della Natura, ma autentica magia.

Una volta scoperto, questo nuovo andamento statistico cominciò a emergere ovunque: nuclei pesanti, zeri della funzione zeta di Riemann, sequenziamento del DNA, proprietà del vetro. La cosa più curiosa, forse, è la possibilità di utilizzarlo per trovare la risposta a un altro problema irrisolto: quante sono le probabilità che un solitario con le carte vi riesca? A scoprire questa applicazione fu, naturalmente, Diaconis.

In uno dei solitari più diffusi, si distribuiscono le carte in sette colonne, una carta nella prima colonna, due nella seconda e sette nell'ultima. L'ultima carta di ciascuna colonna è scoperta. La carte residue vanno girate a gruppi di tre. È consentito mettere una carta scoperta sopra un'altra se la carta che si sta spostando è di colore diverso dalla carta su cui si intende collocarla e la segue nell'ordine decrescente dei valori. Così, per esempio, un sette rosso può andare su un

otto nero, e un fante nero su una regina rossa. Quando compaiono, gli assi vanno messi da parte, uno separato dall'altro. Sopra ogni asso si collocheranno, in ordine crescente, le carte del seme corrispondente, fino a esaurirle tutte.



Klondike, uno dei più popolari solitari con le carte, e tuttavia un mistero per i matematici.

Il gioco, Klondike, ha diverse varianti. A Las Vegas potete comprare un mazzo di carte per cinquantadue dollari. Invece di riutilizzare più volte le carte rimaste nel mazzo dopo ogni ciclo, scoprendone però una sola ogni tre, potete scoprire tutte le carte del mazzo in sequenza, ma una volta soltanto. Il banco paga cinque dollari per ogni carta che riuscite a sistemare nei quattro mazzetti ordinati per seme dall'asso al re.

Anche se il solitario si gioca dal 1780 o giù di lì, ed è familiare a quasi tutti i possessori di un personal computer, nes-

suno sa con quale frequenza riesca. Considerando che a Las Vegas giocare a Klondike può far vincere cinque dollari a carta, varrebbe la pena di sapere quante sono le probabilità di completarlo. Anche un gioco dall'aspetto così semplice contiene abbastanza elementi di complessità da eludere i tentativi di Diaconis di calcolare il tasso medio di riuscita. Dai dati che ha raccolto nel corso degli anni, sembra che il solitario riesca all'incirca una volta ogni quindici. A lui, però, piacerebbe dimostrarlo.

Una strategia molto comune per risolvere un problema matematico difficile è iniziare da un problema più facile. Diaconis ha analizzato una versione molto semplificata del solitario Klondike e ha avuto la grande sorpresa di scoprire che la frequenza media con cui si riesce a completare questo gioco di pazienza ha un nesso profondo con le frequenze di quei tamburi matematici casuali. Ma a dispetto dei progressi compiuti, Diaconis ritiene che un'analisi completa del solitario Klondike sia ancora lontana. Promette ai suoi studenti che finiranno sulla prima pagina del «New York Times» se riusciranno nell'impresa. Nonostante le allettanti connessioni con i tamburi matematici casuali, sia il solitario Klondike sia l'ipotesi di Riemann continuano a restare elusivi.

Biliardi quantistici

I teorici dei numeri stavano cercando di fare i conti con la strana piega che la loro disciplina aveva preso dopo il breve

incontro informale fra Montgomery e Dyson. Anche se l'analisi di Montgomery sembrava indicare che all'origine degli zeri di Riemann potesse esserci la fisica dei tamburi quantistici, poco altro illuminava quel nuovo percorso. Dove si nascondeva il tamburo magico? Dai dati statistici e dagli indizi raccolti fino a quel momento, lo specifico tamburo associato agli zeri di Riemann non sembrava diverso da un qualsiasi altro tamburo scelto a caso. Questo non facilitava certo la sua individuazione. Quando quello strano collegamento fu analizzato più a fondo, divenne chiaro che il nesso con la fisica quantistica non rappresentava l'unica svolta sorprendente nella storia degli zeri di Riemann. Emerse infatti un nuovo nesso che avrebbe aiutato i matematici nella loro ricerca del tamburo quantistico.

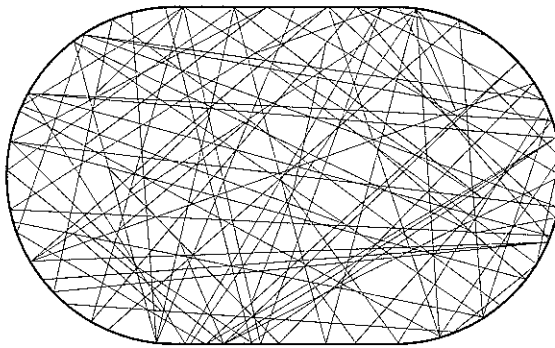
Diaconis e gli altri statistici hanno sviluppato una serie di armi sofisticate con cui possono verificare la fondatezza di qualsiasi affermazione suscettibile di analisi. Il Codice Genesi appariva statisticamente significativo perché coloro che lo proponevano mostravano i dati sempre e solo da una particolare angolazione. Ma quando fu sottoposto ad altre verifiche, non resse. Anche se le previsioni teoriche di Montgomery avevano resistito alle verifiche di Diaconis, nel New Jersey Odlyzko cominciava a diventare inquieto per alcuni risultati dei suoi nuovi calcoli. Aveva iniziato a utilizzare un altro test statistico per capire se il nesso fra zeri di Riemann e fisica quantistica avesse un fondamento reale. E aveva notato che nei dati relativi agli zeri di Riemann iniziavano a insinuarsi delle discrepanze preoccupanti.

Odlyzko stava prendendo in considerazione l'andamento di una grandezza statistica chiamata *varianza*. Tracciò il grafico relativo agli zeri di Riemann e lo confrontò con il grafico corrispondente che si otteneva dall'analisi delle frequenze di un tamburo quantistico casuale. Osservando l'andamento dei due grafici si accorse che, se all'inizio c'era una corrispondenza molto buona, a un certo punto i dati relativi agli zeri di Riemann si discostavano bruscamente dal grafico delle frequenze teoriche dei tamburi quantistici casuali. La prima parte del grafico confermava l'andamento statistico della distanza fra zeri adiacenti. Ma quando Odlyzko procedette nell'analisi, scoprì che cominciavano a comparire delle discrepanze. Il grafico non seguiva più l'andamento statistico delle distanze fra zeri successivi, così come accadeva all'inizio, ma piuttosto quello delle distanze fra l'N-esimo e l'$(N + 1000)$-esimo zero. In un primo momento Odlyzko pensò che quella deviazione fosse dovuta a un errore nei calcoli. Si scoprì invece che stava assistendo per la prima volta agli effetti prodotti sul paesaggio di Riemann da un altro tema importante della scienza del XX secolo: la *teoria del caos*.

Come la fisica quantistica, anche la teoria del caos è riuscita ad affermarsi nella cultura popolare. Negli anni Novanta non c'era rave party senza l'immagine di un frattale proiettata sulle pareti. A dispetto della loro apparente complessità, i frattali sono generati da leggi il cui aspetto è assolutamente innocuo. La teoria del caos, la matematica che sta dietro a queste immagini, aiuta a capire perché, per quanto semplici possano essere le leggi della Natura, la realtà appare infinita-

mente complessa. Il termine «caos» si utilizza quando un sistema dinamico è molto sensibile alle condizioni iniziali. Quando una minima variazione nel modo in cui si appronta un esperimento produce una drastica differenza nei risultati che si ottengono, questa è la firma inconfondibile del caos.

Una delle manifestazioni della matematica del caos si ha nel gioco del biliardo. Se imprimete un forte colpo a una palla su un tavolo da biliardo, la traiettoria che essa seguirà sarà determinata dagli angoli con cui colpisce le sponde del tavolo. La cosa diventa interessante quando si modifica appena la direzione iniziale del tiro. La traiettoria si scosta drasticamente da quella seguita in precedenza oppure no? La risposta dipende dalla forma del tavolo. Su un normale tavolo da biliardo rettangolare non si manifesta alcun comportamento caotico nella traiettoria seguita dalla palla (a dispetto di ciò che probabilmente pensano molti giocatori dilettanti). La traiettoria della palla è perfettamente prevedibile, e un leggero cambiamento nella direzione iniziale del tiro non la altera in maniera sensibile. Ma su un tavolo da biliardo di forma simile a quella di uno stadio le traiettorie delle palle assumono un aspetto completamente diverso. Se adesso lanciamo con forza due palle variando solo minimamente le loro direzioni iniziali, esse seguiranno traiettorie del tutto differenti che non sembrano avere nulla da spartire. Come mostra la figura alla pagina seguente, la fisica di un tavolo da biliardo a forma di stadio è caotica, in netto contrasto con le traiettorie molto prevedibili che le palle seguono su un normale tavolo rettangolare.



Moto caotico: le traiettorie tracciate dalle palle
su un tavolo da biliardo a forma di stadio.

Quando la matematica del caos fece la sua comparsa, negli anni Settanta, alcuni fisici quantistici presero a interessarsi alle implicazioni della nuova teoria per il loro campo di ricerca. Si chiedevano in particolare che cosa sarebbe successo se avessero giocato a quel tipo di biliardo su scala atomica. Dopo tutto, sotto alcuni aspetti gli elettroni si comportavano come microscopiche palle da biliardo.

Usando del materiale semiconduttore, lo stesso di cui sono fatti i microchip dei computer, è possibile realizzare un tavolo da biliardo così piccolo che sulla punta di uno spillo ce ne potrebbero stare centinaia. I fisici cominciarono ad analizzare il moto di un elettrone che rimbalza sulle sponde di questo minuscolo tavolo. L'elettrone, non più legato a un atomo, è libero di muoversi per il semiconduttore. È proprio

questo movimento degli elettroni che rende possibile il trasferimento dei dati nel chip di un computer. Ma la traiettoria di un elettrone non è completamente libera. Anche se non orbita più attorno al nucleo di un atomo, i suoi movimenti sono limitati dalle sponde del tavolo. Ai fisici interessava studiare gli effetti che differenti forme del tavolo avrebbero avuto sia sul comportamento ondulatorio dell'elettrone sia sul suo moto di particella, assimilabile a quello di una palla da biliardo. Proprio come un elettrone legato a un atomo vibra a certe frequenze caratteristiche, altrettanto fa un elettrone libero mentre traccia una traiettoria sul suo minuscolo tavolo.

Quando i fisici analizzarono l'andamento statistico dei livelli energetici, scoprirono che esso variava a seconda che il tavolo da biliardo producesse traiettorie caotiche oppure normali. Se gli elettroni erano confinati in un'area rettangolare, in cui tracciavano traiettorie normali, non caotiche, allora i loro livelli energetici si distribuivano in modo casuale. In particolare, i livelli energetici risultavano spesso ravvicinati. Tuttavia l'analisi statistica forniva risultati molto diversi quando gli elettroni erano confinati in un'area a forma di stadio, in cui le traiettorie sono caotiche. I livelli energetici non erano più casuali. Seguivano invece un andamento molto più uniforme, in cui non comparivano mai due livelli ravvicinati.

Era una nuova manifestazione della strana repulsione fra i livelli energetici. I biliardi quantistici caotici producevano lo stesso andamento regolare già osservato da Dyson nei livelli

energetici dei nuclei di atomi pesanti e da Montgomery e Odlyzko nell'ubicazione degli zeri di Riemann. Questi livelli energetici si accordavano molto bene con la distribuzione statistica delle frequenze di un tamburo quantistico casuale. Ma si scoprì che non tutti i dati statistici coincidevano alla perfezione. I fisici stavano cominciando a comprendere che la distribuzione delle distanze fra l'N-esimo e l'$(N + 100)$-esimo livello energetico cambiava a seconda che si giocasse su biliardi quantistici o si misurassero semplicemente le frequenze di un tamburo quantistico casuale.

Uno degli esperti di questo cocktail di teoria del caos e fisica quantistica è Sir Michael Berry dell'università di Bristol. Berry è stato il primo a comprendere che gli scostamenti notati da Odlyzko fra i grafici della varianza degli zeri di Riemann e dei tamburi quantistici casuali indicavano che un sistema quantistico caotico poteva offrire il miglior modello fisico per il comportamento dei numeri primi. Berry è una figura carismatica della comunità scientifica odierna. Egli porta nella sua disciplina un'atmosfera di raffinatezza che talvolta fa difetto a chi vive immerso nel mondo scientifico. È un uomo del Rinascimento, che ama citare tanto i giganti della letteratura quanto quelli della scienza per persuadere gli altri della propria visione del mondo. Ed è un esperto nel trovare l'immagine perfetta con cui penetrare le complessità delle formule matematiche. È una grande fortuna per i matematici che questo cavaliere inglese si sia unito ai loro ranghi nell'assalto all'ipotesi di Riemann.

Berry rimase affascinato dai numeri primi negli anni Ot-

tanta, quando lesse sul «Mathematical Intelligencer» un articolo intitolato *I primi 50 milioni di numeri primi*. L'articolo era di Don Zagier, il moschettiere della matematica del Max Planck Institut che per l'ipotesi di Riemann aveva sfidato a duello Bombieri. Nell'articolo Zagier non proponeva un noioso elenco di milioni di numeri, ma spiegava come usare gli zeri di Riemann per creare delle onde che riproducevano magicamente il numero di numeri primi che ci si aspetta di incontrare man mano che si procede a contare. «Era un articolo magnifico. Gli zeri di Riemann, pensai, sono una cosa meravigliosa.» Berry fu catturato dall'interpretazione fisica della scoperta di Riemann: l'esistenza di una musica insita nei numeri primi.

Essendo un fisico, Berry porta nello studio dei numeri primi quella capacità di cogliere i legami con la realtà fisica che a gran parte dei matematici manca. I matematici possono trascorrere talmente tanto tempo nel mondo astratto delle loro costruzioni mentali che finiscono per dimenticare tutti i collegamenti fra la matematica e la realtà fisica che ci circonda. Riemann aveva trasformato i numeri primi in funzioni d'onda; per un fisico come Berry, queste onde non sono soltanto una musica astratta, ma possono essere tradotte in suoni reali, suoni che chiunque può sentire. Nelle sue presentazioni dell'ipotesi, proponeva sempre l'ascolto di una registrazione della musica di Riemann: un rumore bianco cupo, simile a un tuono lontano. Berry lo descrive come «un genere di musica decisamente postmoderno, ma grazie all'opera di Riemann possiamo dire quello

che Bernard Shaw disse di Wagner: questa musica è migliore di come suona».

La nascita dell'interesse di Berry per i numeri primi coincise con una comprensione sempre migliore delle differenze fra la distribuzione dei livelli energetici negli elettroni sui biliardi quantistici e quella di livelli energetici in un tamburo quantistico casuale. «Pensai che potesse essere interessante riesaminare la storia degli zeri di Riemann e delle idee di Dyson alla luce dei nuovi nessi con il caos quantistico.» La particolare distribuzione che Berry aveva scoperto nei livelli energetici dei biliardi quantistici avrebbe avuto un riscontro nella distribuzione degli zeri nel paesaggio zeta di Riemann? «Pensavo che sarebbe stato molto bello capire se gli zeri si comportassero davvero in quel modo, così feci io stesso alcuni calcoli approssimativi.» Ma non aveva abbastanza dati. «Poi venni a sapere che Odlyzko aveva fatto questi suoi epici calcoli. Gli scrissi ed egli fu incredibilmente disponibile. Mi spiegò che era un po' preoccupato perché a un certo punto i suoi calcoli avevano cominciato a manifestare qualche scostamento. Pensava di aver commesso un errore.»

Ma Odlyzko non aveva l'intuito di un fisico. Quando Berry mise a confronto gli zeri con i livelli energetici dei biliardi quantistici caotici, scoprì una concordanza perfetta. Le discrepanze osservate da Odlyzko si rivelarono essere il primo segno della differenza fra la distribuzione delle frequenze in un tamburo quantistico casuale e quella dei livelli di energia dei biliardi quantistici caotici. Odlyzko non sapeva nulla di questo nuovo sistema quantistico caotico, ma Berry lo riconobbe subito:

> Fu un grande momento, perché il risultato era manifestamente giusto. Per me era una prova circostanziata, convincente e incontrovertibile del fatto che se si ritiene che l'ipotesi di Riemann sia vera, allora alla base degli zeri di Riemann non ci sarebbe semplicemente un sistema quantistico, ma un sistema quantistico con un omologo classico, moderatamente semplice ma caotico. Fu un momento delizioso. Era, se si vuole, un regalo che la meccanica quantistica faceva alla teoria degli zeri di Riemann.

La cosa curiosa è che, se il segreto dei numeri primi è davvero un gioco di biliardo quantistico, allora i numeri primi sono rappresentati da traiettorie molto speciali sul tavolo del biliardo. Alcune traiettorie fanno ritornare la palla al punto di partenza dopo un certo numero di passaggi sul tavolo, dopodiché si ripetono uguali a se stesse. Sembra che siano proprio queste traiettorie speciali a rappresentare i numeri primi: a ogni traiettoria corrisponde un numero primo, e tanto più una traiettoria si estende prima di ripetersi, quanto più è grande il numero primo corrispondente.

La nuova svolta impressa da Berry potrebbe portare a un'unificazione di tre grandi temi scientifici: la fisica quantistica (la fisica dell'estremamente piccolo), il caos (la matematica dell'impredicibilità) e i numeri primi (gli atomi dell'aritmetica). Forse, tutto considerato, l'ordine che Riemann aveva sperato di scoprire nei numeri primi è descritto dal caos quantistico. Ancora una volta i numeri primi ribadiscono il loro carattere enigmatico. L'apparente legame fra la di-

stribuzione statistica degli zeri e quella dei livelli energetici ha convinto molti fisici a prender parte alla ricerca di una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann. All'origine degli zeri potrebbero esserci proprio le frequenze di un tamburo matematico; se così fosse, i fisici quantistici risulterebbero essere i meglio equipaggiati per individuare quei tamburi. Le loro stesse esistenze vibrano al suono di quei tamburi.

Anche se abbiamo tutte queste prove del fatto che gli zeri di Riemann sono vibrazioni, tuttavia non sappiamo che cosa sia a vibrare. Può darsi che la fonte della vibrazione sia puramente matematica, senza alcun modello fisico. È vero che la matematica che spiega gli zeri potrebbe essere la stessa matematica del caos quantistico, ma questo non significa che una soluzione avrà necessariamente una manifestazione fisica. Berry non la pensa così. Secondo lui, una volta che la matematica sarà stata definita completamente, emergerà un corrispondente modello fisico i cui livelli energetici rispecchieranno gli zeri di Riemann. «Non ho alcun dubbio che quando qualcuno avrà trovato l'origine degli zeri, quel qualcuno realizzerà il modello fisico.» Non è possibile che tale modello esista già, nascosto da qualche parte nell'universo, in attesa di essere scoperto? Forse i numeri primi cosmici che Ellie Arroway scopre nel romanzo *Contact* di Carl Sagan non sono un segno di vita aliena, ma solo le frequenze di una stella di neutroni che vibra. Come spiega Berry, «c'è questo famoso principio totalitario secondo cui tutto ciò che è permesso dalle leggi della fisica può essere trovato da qualche parte in Natura. Io sono scettico sul fatto che il principio si possa ap-

plicare in questo caso. Quel che è certo è che si potrebbe riuscire a creare il modello in un modo o nell'altro».

Se Odlyzko ha avuto l'AT&T alle proprie spalle, Berry e il suo gruppo di ricerca hanno beneficiato per un certo numero di anni del sostegno di un altro importante attore economico. A Bristol, in quella che è la sua sede centrale nel Regno Unito, la Hewlett-Packard assunse alcuni membri del gruppo di Berry perché contribuissero a sfruttare il potere della fisica quantistica. Alla Hewlett-Packard sapevano che ogni progresso compiuto sull'ipotesi di Riemann aveva la capacità potenziale di migliorare la nostra comprensione del gioco del biliardo quantistico. E poiché le regole del biliardo quantistico servono a determinare il comportamento dei circuiti elettronici dei computer, dato che gli elettroni sfrecciano nei solchi scolpiti nei microchip, sapevano anche quanto fosse importante tenersi aggiornati sui progressi compiuti dagli esperti giocatori di biliardo quantistico che stavano per ingaggiare.

42: la risposta alla domanda fondamentale

Benché i colossi come l'AT&T e la Hewlett-Packard siano stati costretti a ridurre i propri investimenti sui numeri primi a causa del periodo di stagnazione che ha colpito l'industria dei computer, c'è ancora un attore economico che è felice di continuare a promuovere la ricerca in questo gioco apparentemente astratto. La Fry Electronics è una catena di

una ventina di immensi megastore di elettronica sparsi in tutti gli Stati Uniti occidentali che vende a tutta la nazione accessori per computer e altri gadget elettronici. L'azienda non può offrire finanziamenti pari a quelli di giganti come l'AT&T e la Hewlett-Packard. Ma se visitate la sede centrale della Fry Electronics a Palo Alto, in California, troverete, accanto all'entrata principale del megastore, una sgangherata porta di metallo con la targa «American Institute of Mathematics».

L'istituto è una creatura di uno degli amministratori dell'azienda, John Fry. Lui e Brian Conrey hanno studiato matematica insieme alla Santa Clara University. Mentre Conrey ha proseguito fino a conquistarsi un posto nel libro dei record per aver dimostrato l'appartenenza alla retta di Riemann di quella che fino a oggi è la più alta percentuale di zeri, Fry si è imbarcato in un'avventura più commerciale, ma non ha mai perduto il suo interesse per la matematica. Quando ci fu il boom dell'industria dell'elettronica, Fry si domandò se non ci fosse una maniera per dare il proprio sostegno alla disciplina. Aveva già sponsorizzato una squadra di calcio a cinque, perciò decise di mettere in pratica la propria idea sponsorizzando una squadra di matematici.

Fry contattò Conrey, e insieme escogitarono un piano per cercare di coordinare gli sforzi volti a dimostrare l'ipotesi di Riemann. Per lanciare l'iniziativa, i due finanziarono un incontro da tenersi nel 1996 a Seattle, in occasione del centenario della dimostrazione del teorema dei numeri primi. Non si trattava semplicemente di mettere del denaro; i

due intendevano incoraggiare l'adozione di un nuovo codice di comportamento nella collaborazione fra matematici. L'ipotesi di Riemann era ormai un trofeo così ambito che molti erano riluttanti a rendere pubblica anche la più vaga delle idee per il timore che potesse fornire l'ultima e decisiva tessera del puzzle a qualcun altro. Conrey e Fry volevano interrompere questo ciclo, che a loro modo di vedere non stava portando da nessuna parte. Nelle riunioni e nei convegni l'enfasi avrebbe dovuto essere posta sulla condivisione di idee che non necessariamente avrebbero portato a risultati concreti. Giunsero persino a far sedere i matematici attorno a un tavolo come se dovessero accordarsi su un piano aziendale.

L'incontro di Seattle produsse quelli che a oggi sono alcuni degli indizi più convincenti del fatto che l'ipotesi di Riemann ha qualcosa a che fare con il caos quantistico. Gli indizi si materializzarono dopo che alcuni dei matematici presenti espressero i loro dubbi sull'opportunità di basare il nesso esclusivamente sull'osservazione del fatto che i due grafici apparivano indistinguibili. Uno dei matematici che espresse un salutare scetticismo fu Peter Sarnak. Benché fosse rimasto molto impressionato dalle tante analogie fra il caos quantistico e gli zeri della funzione zeta di Riemann, Sarnak doveva ancora convincersi dell'esistenza di un autentico nesso.

Sarnak è una delle figure più prestigiose di Princeton. È stato, fra l'altro, un confidente di Andrew Wiles nel periodo in cui Wiles lanciava in gran segreto il suo attacco all'ultimo teorema di Fermat. L'interesse di Sarnak per l'ipotesi di Rie-

mann era nato a metà degli anni Settanta, quando era giunto in America dal Sudafrica per lavorare con Paul Cohen alla Stanford University, non lontano dalla Fry Electronics. Da studente, Sarnak si era rivolto a Cohen perché era interessato alla logica matematica. Dieci anni prima, nel 1963, Cohen aveva sbalordito il mondo risolvendo il primo dei ventitré problemi di Hilbert grazie a una serie ingegnosa di argomentazioni logiche. Contrariamente alle previsioni di Hilbert, secondo cui alla sua domanda si sarebbe potuto rispondere con un «sì» o con un «no», Cohen dimostrò che era possibile *scegliere* la risposta che si voleva fosse vera.

Il giovane sudafricano arrivò alla Stanford pensando che sarebbe stato messo a lavorare su un altro diabolico rompicapo logico. Ma Cohen aveva messo gli occhi su un altro dei problemi di Hilbert, l'ottavo. Risolvere il primo problema di Hilbert era un'impresa difficile da eguagliare, e Cohen riteneva che solo l'ipotesi di Riemann gli avrebbe potuto dare un piacere ancora maggiore. Egli rese partecipe Sarnak delle proprie idee sul problema, suscitando in lui una passione per la teoria dei numeri che non l'ha più abbandonato.

La passione di Sarnak per la propria disciplina è contagiosa. Quando parla di matematica trasmette energia ed entusiasmo. Selberg, che oggi riconosce di essere vecchio e duro d'orecchi, dice che Sarnak è uno dei pochi matematici di Princeton di cui ancora riesce a cogliere distintamente le parole. Il suo accento sudafricano risuona per il dipartimento quando si entusiasma per qualche nuovo sviluppo nella disciplina. L'ingresso della fisica quantistica nei sacri corridoi

della teoria dei numeri aveva prodotto una grande eccitazione, ma Sarnak voleva di più: c'erano prove concrete del fatto che il nesso fra livelli energetici e gli zeri avrebbero prodotto qualche reale progresso?

È vero che questo collegamento ci ha suggerito dove andare a cercare una spiegazione, ma non ci ha detto nulla che già non sapessimo. Il nesso sembrava basato su una forte concordanza fra vari risultati statistici. Il fatto che due immagini apparissero molto simili non era il genere di cose a cui i teorici dei numeri attribuivano il valore di prove convincenti dell'esistenza di un anello di congiunzione. Tutto considerato, i matematici guardavano ancora con scetticismo al potere delle immagini di rivelare la verità, benché Riemann avesse sdoganato definitivamente la geometria.

Quando arrivò all'incontro di Seattle, Sarnak dubitava che qualcosa di diverso da una profonda penetrazione matematica potesse rivelare aspetti significativi del paesaggio di Riemann. Dopo aver sentito discorsi sulle analogie fra zeri di Riemann e livelli energetici nei biliardi quantistici caotici, e dopo aver ascoltato l'esecuzione della musica di Riemann proposta da Berry, Sarnak non riuscì più a trattenersi. Era davvero affascinante vedere emergere le medesime immagini nei due campi, ma c'era qualcuno in grado di indicare un solo contributo reale alla teoria dei numeri che quei nessi avessero reso possibile? Sarnak propose una sfida ai fisici quantistici: usare l'analogia fra caos quantistico e numeri primi per rivelare qualcosa che non si sapesse già sul paesaggio di Riemann, qualcosa di specifico che non si celasse dietro un'ana-

lisi statistica. A mo' di incoraggiamento, Sarnak mise in palio una bottiglia di buon vino.

Un ex studente di Berry, Jon Keating, si sarebbe aggiudicato la bottiglia di Sarnak grazie al ruolo fondamentale di un numero molto speciale, il 42. Se siete versati in narrativa popolare, saprete che in quell'ambito il numero 42 riveste un'importanza particolare. Nella *Guida galattica per gli autostoppisti* di Douglas Adams, Zaphod Beeblebrox scopre che 42 è la Risposta alla Domanda Fondamentale sulla Vita, l'Universo e Tutto (anche se non è troppo chiaro quale sia la domanda). Nella seconda metà del XIX secolo, il numero 42 fu anche molto caro a Lewis Carroll, che d'altronde era un matematico oxoniano oltre che uno scrittore. Nel processo al Fante di Cuori, in *Alice nel paese delle meraviglie*, il Re proclama: «Regola Quarantadue, TUTTE LE PERSONE PIÙ ALTE DI UN MIGLIO DEVONO ABBANDONARE LA CORTE». Nei suoi scritti, Carroll riprende di continuo il numero. Nella *Caccia allo snualo*, per esempio, il Castoro arriva con «quarantadue casse, tutte riempite con cura / e il proprio nome dipinto ben chiaro su ciascuna». La cosa strana è che quel numero stava per entrare nella storia dell'ipotesi di Riemann, contribuendo a convincere i teorici dei numeri più scettici del fatto che il caos quantistico era un'altra faccia della moneta dei numeri primi.

Dopo aver saputo della bottiglia di buon vino messa in palio da Sarnak, Conrey propose ai fisici una sfida molto specifica che avrebbe costituito un precedente. Era una sfida che stava molto a cuore a Conrey, perché aveva a che fare con un

problema su cui lavorava da anni, anche se con scarsa fortuna. Si sapeva che dei particolari coefficienti della funzione zeta di Riemann, i cosiddetti *momenti* della funzione, avrebbero dovuto produrre una sequenza di numeri interi. Il fatto era che i matematici disponevano di pochissime indicazioni su come calcolare quella sequenza. Hardy e Littlewood erano riusciti a dimostrare che il primo numero della serie era 1. Negli anni Venti Albert Ingham, uno studente di Littlewood, dimostrò che il numero successivo era 2. Questi risultati non erano sufficienti a definire un andamento che potesse contribuire a un'ulteriore esplorazione.

Prima dell'incontro di Seattle, Conrey aveva compiuto un'enorme quantità di lavoro su quel problema insieme a un collega, Amit Ghosh, e il loro lavoro suggeriva che il terzo elemento della sequenza cadeva molto più avanti, in corrispondenza del numero 42. Per Conrey, il fatto che questo fosse il terzo numero della serie «fu in qualche modo sorprendente. Era l'indicazione della presenza di un certo livello di complessità». Non si aveva la minima idea di come proseguisse la sequenza da quel punto. Conrey sfidò i fisici a spiegare quel 42 nei termini dell'analogia con la fisica quantistica. «Quarantadue è un numero. O c'è o non c'è. Non è come vedere quanto bene i dati si adattano a una curva» sottolineò Conrey.

Per nulla scoraggiato, Jon Keating partì da Seattle e cominciò a darsi da fare. L'incontro era stato un tale successo che Fry e Conrey decisero di organizzarne un altro. Si tenne due anni più tardi presso lo Schrödinger Institut di Vienna,

una sede appropriata se si considera la nuova alleanza che stava emergendo fra teoria dei numeri e una disciplina, la fisica quantistica, che Schrödinger aveva contribuito a creare.

Nel frattempo Conrey aveva unito le proprie forze a quelle di un altro matematico, Steve Gonek. Con enorme fatica, spremendo tutto ciò che poterono dalle loro conoscenze della teoria dei numeri, Conrey e Gonek riuscirono a formulare un'ipotesi sul valore del quarto numero della serie: 24.024. «Così adesso avevamo questa sequenza: 1, 2, 42, 24.024, ... Provammo in tutti i santi modi a indovinare quale fosse la sequenza. Sapevamo che il nostro metodo non avrebbe più funzionato, dato che forniva un risultato negativo per il numero successivo della sequenza.» Si sapeva infatti che tutti i numeri della serie erano maggiori di zero. Conrey arrivò a Vienna con l'intenzione di esporre le ragioni per cui lui e Gonek ritenevano che il quarto numero della serie fosse 24.024.

«Keating arrivò piuttosto tardi. Lo vidi il pomeriggio in cui doveva tenere la sua conferenza; avevo visto qual era il titolo e avevo cominciato a chiedermi se ce l'avesse fatta. Non appena si fece vedere gli andai incontro e subito gli chiesi: "Ci sei arrivato?". Disse di sì, che aveva trovato il 42.» In effetti, insieme a Nina Snaith, una sua studentessa di dottorato, Keating aveva creato una formula in grado di generare ogni numero della sequenza. «Allora gli dissi del 24.024.» Questo era un test probante. La formula di Keating e di Nina Snaith avrebbe confermato il valore ipotizzato da Gonek? Dopo tutto, Keating sapeva che il risultato che avrebbe do-

vuto trovare era 42, e perciò poteva aver manipolato la sua formula in modo da ricavare proprio quel numero. Ma il nuovo numero, 24.024, era completamente ignoto a Keating, che quindi non avrebbe potuto barare.

«Mancava poco alla conferenza di Jon. Andammo a una delle lavagne dello Schrödinger Institut e calcolammo il valore che la formula forniva per il quarto numero della sequenza.» Continuavano a compiere banali errori di calcolo (capita a volte, dopo anni di ragionamenti astratti in cui di rado si fa ricorso alle tavole pitagoriche che abbiamo imparato da bambini, che i matematici non siano proprio dei draghi nei calcoli aritmetici). Finalmente riuscirono a calcolare il risultato in maniera corretta. «Quando scoprimmo che era 24.024, fu una cosa semplicemente incredibile» racconta Conrey. Pochi secondi dopo, Keating si precipitò a tenere la conferenza in cui avrebbe annunciato pubblicamente la formula scoperta da lui e da Nina Snaith. Era ancora in preda all'eccitazione per aver appena scoperto che quella formula confermava il risultato previsto da Conrey e Gonek. Keating definì l'esperienza vissuta alla lavagna «i secondi più esaltanti della mia vita scientifica».

Keating era agitato al pensiero di tenere una conferenza davanti alla crema dei teorici dei numeri: lui, un fisico, stava per parlare a una platea di matematici di una cosa su cui lavoravano da anni. Ma l'euforia di aver scoperto 24.024 gli diede la fiducia di cui aveva bisogno. Fra il pubblico c'era Selberg, che era ormai il grande vecchio della disciplina. Alla fine della conferenza il pubblico fu invitato a rivolgere delle

domande. Selberg ha la reputazione di non porre domande alla fine delle conferenze, ma di fare piuttosto delle dichiarazioni del tipo «Questo l'ho dimostrato negli anni Cinquanta» oppure «Ho tentato lo stesso approccio trent'anni fa: non funziona». Keating si preparò all'inevitabile. Invece, Selberg cominciò a fare una domanda dopo l'altra, evidentemente affascinato dall'idea. Solo dopo che Keating ebbe eroicamente risposto a tutte le sue domande, Selberg rilasciò una dichiarazione: «Deve essere giusto». Keating aveva risposto alla sfida di Sarnak, e aveva detto ai matematici qualcosa che non sapevano. Sarnak tenne fede all'impegno e gli consegnò la bottiglia di vino che aveva promesso.

Il potere dell'analogia fra gli zeri di Riemann e la fisica quantistica è doppio. Primo, ci dice dove dovremmo andare a cercare una soluzione all'ipotesi di Riemann. E secondo, come adesso aveva dimostrato Keating, può svelare altre proprietà del paesaggio di Riemann. Spiega Berry: «L'analogia non ha un solido fondamento matematico. Va giudicata in base a quanto si rivela utile per suggerire ai matematici cose che starà poi a loro dimostrare. Non mi vergogno ad ammetterlo: come fisico mi è cara quella massima di Feynman secondo cui "Si conoscono molte più cose di quante siano state dimostrate"». Anche se i fisici non sono in grado di concepire un modello fisico che genera gli zeri, i matematici ammettono che potrebbe benissimo essere un fisico a dimostrare finalmente l'ipotesi di Riemann. Ed è per questo che il pesce d'aprile di Bombieri, con cui si è aperta la nostra storia, era così credibile.

L'ultima sorpresa di Riemann

I fisici ritengono che la ragione per la quale gli zeri di Riemann devono disporsi tutti lungo una linea retta è che si riveleranno essere le frequenze di un tamburo matematico. A uno zero che cadesse fuori della retta corrisponderebbe una frequenza immaginaria che la teoria proibisce. Non è la prima volta che un'argomentazione di questo tipo viene usata per risolvere un problema. Da studenti, Keating, Berry e altri fisici avevano studiato tutti un classico problema di idrodinamica la cui soluzione si basa su un ragionamento simile. Il problema riguarda una sfera fluida in rotazione tenuta insieme dalle reciproche interazioni gravitazionali fra le particelle che la compongono. Una stella, per esempio, è un'enorme palla di gas che ruota su se stessa ed è tenuta insieme dalla propria gravità. La questione è: che cosa accadrà alla palla se le si dà un calcetto? Si limiterà a tremolare un po' oppure si disintegrerà? Per rispondere alla domanda bisogna stabilire se certi particolari numeri immaginari giacciano su una linea retta oppure no. Se lo fanno, la sfera di fluido rotante rimarrà intatta. La ragione per cui questi numeri immaginari si dispongono in linea retta è strettamente legata alle idee della fisica quantistica con cui si spera di dimostrare l'ipotesi di Riemann. Chi scoprì la soluzione di questo problema di idrodinamica? Chi usò la matematica delle vibrazioni per costringere quei numeri immaginari a disporsi in linea retta. Nientemeno che Bernhard Riemann.

Poco dopo il trionfo riscosso allo Schrödinger Institut,

Keating si recò a Gottinga, dove avrebbe dovuto tenere una conferenza sull'uso della fisica quantistica per far luce sull'ipotesi di Riemann. Quasi tutti i matematici che passano da Gottinga ne approfittano per visitare la biblioteca ed esaminare gli appunti inediti di Riemann, il suo *Nachlass*. Percepire un legame con una figura così importante della storia della matematica non è soltanto un'esperienza emozionante: il *Nachlass* cela ancora molti misteri irrisolti, racchiusi negli appunti illeggibili di Riemann. È la stele di Rosetta della matematica.

Prima che Keating partisse per Gottinga, uno dei suoi colleghi del dipartimento di matematica, Philip Drazin, gli raccomandò di esaminare la parte del *Nachlass* in cui Riemann affronta quel classico problema di idrodinamica. Anche se la governante di Riemann distrusse moltissimi dei suoi appunti, il *Nachlass* contiene ancora una gran quantità di materiale, e perciò è stato diviso in molte parti che coprono vari periodi della vita di Riemann e i suoi molteplici interessi.

Alla biblioteca di Gottinga, Keating richiese le due parti del *Nachlass* che voleva consultare: una conteneva le idee di Riemann sugli zeri nel suo paesaggio zeta e l'altra riguardava i suoi studi di idrodinamica. Quando dal caveau della biblioteca emerse una sola pila di documenti, Keating fece notare che lui aveva chiesto di vedere due parti. Tutt'e due le «parti» erano sugli stessi fogli, gli disse il bibliotecario. Quando si mise a esaminare quelle pagine, Keating scoprì con grande meraviglia che Riemann aveva escogitato la sua

dimostrazione relativa alla sfera di fluido in rotazione proprio nello stesso periodo in cui stava ragionando sui punti a livello del mare nel suo paesaggio zeta. Per risolvere quel problema di idrodinamica, Riemann aveva usato esattamente lo stesso metodo che ora i fisici stavano proponendo per costringere gli zeri di Riemann a disporsi in linea retta. Lì, davanti a Keating, raccolti nelle stesse pagine, c'erano i pensieri di Riemann su entrambi i problemi.

Ancora una volta il *Nachlass* rivelava in quale misura Riemann precorresse i tempi. Egli non poteva non aver colto il significato che assumeva la sua soluzione al problema di fluidodinamica. Il suo metodo aveva mostrato perché certi numeri immaginari che emergevano dalla sua analisi della sfera di fluido si disponevano in linea retta. E allo stesso tempo – e sugli stessi fogli – stava cercando di dimostrare perché gli zeri del suo paesaggio zeta giacevano tutti su una linea retta. Negli anni successivi a quelle scoperte relative ai numeri primi e all'idrodinamica, Riemann registrò le sue nuove idee nel libricino nero la cui sparizione dagli archivi avrebbe fatto infuriare generazioni di matematici. Con esso, sono scomparsi i pensieri di Riemann sulla possibilità di unire questi due temi della teoria dei numeri e della fisica.

Nei decenni che seguirono la morte di Riemann, la matematica e la fisica cominciarono a divergere. Se Riemann era stato felice di combinarle, gli scienziati che vennero dopo di lui erano sempre meno interessati a esplorare i rapporti fra le due discipline. Soltanto nel XX secolo fisica e matematica ritornarono a procedere fianco a fianco, ed è questa riconcilia-

zione che potrebbe portare a quella scoperta decisiva e inafferrabile che Riemann aveva sognato.

Ma per quanto eccitanti fossero queste connessioni con la fisica, molti matematici credevano ancora nel potere che la propria disciplina aveva di risolvere l'enigma dei numeri primi. Molti erano d'accordo con Sarnak: la soluzione dell'ipotesi di Riemann deve celarsi nel cuore profondo della matematica. I motivi per credere che la matematica da sola possa fornire una risposta si possono far risalire al 1940, e all'attività di un carcerato francese molto speciale.

12

L'ultima tessera del puzzle

Si dice che la storia della matematica dovrebbe procedere come l'analisi musicale di una sinfonia. Ci sono un certo numero di temi, ed è più o meno possibile vedere quando ciascuno di essi compare per la prima volta. Dopodiché, ogni tema si sovrappone agli altri, e l'abilità artistica del compositore sta proprio nella sua capacità di gestirli tutti simultaneamente. A volte il violino segue un particolare tema e il flauto un altro, poi le parti si invertono, e così via. La storia della matematica è esattamente la stessa cosa.

André Weil, *Two Lectures on Number Theory, Past and Present*

Nonostante l'euforia di fronte al gioco di un biliardo quantistico che avrebbe potuto offrire una spiegazione dell'ipotesi di Riemann, molti matematici restavano scettici riguardo all'intrusione dei fisici nel mondo della pura teoria dei numeri. La maggior parte di questi matematici continuavano a esser convinti che la loro disciplina avesse tutte le carte in re-

gola per poter spiegare da sola perché i numeri primi si comportano secondo queste nostre ipotesi. L'idea per cui sia il fenomeno quantistico sia i numeri primi obbedissero a uno stesso tipo di modelli matematici era di certo plausibile, ma molti matematici ritenevano improbabile che l'intuizione fisica avrebbe potuto essere d'aiuto nel dimostrare l'ipotesi di Riemann. Quando iniziarono a diffondersi le voci che uno dei più grandi artefici della teoria matematica pura aveva rivolto la propria attenzione all'ipotesi di Riemann, la fiducia in se stessi dei matematici sembrò trovare una giustificazione. Alain Connes aveva iniziato a tenere lezioni sulle sue idee per una soluzione verso la metà degli anni Novanta. Molti pensavano che l'ipotesi di Riemann sarebbe stata finalmente dimostrata.

Già il semplice fatto che Connes stesse affrontando a testa bassa l'ipotesi di Riemann era di per sé degno di nota. Selberg, per esempio, ammette di non aver mai realmente provato a dimostrarla: è vano scendere in campo per combattere una battaglia – sono le sue parole – quando non si ha un'arma con cui combatterla. Riguardo alla propria decisione di intraprendere questa battaglia, Connes scrive che «secondo il mio primo maestro, Gustave Choquet, affrontando apertamente un ben noto problema irrisolto, uno si prende il rischio di essere ricordato più per un suo eventuale fallimento in quest'impresa che per qualunque altra cosa positiva abbia fatto nella sua vita. Ma, a una certa età, mi sono reso conto che aspettare "al sicuro" di giungere al termine della propria vita significa comunque accettare di andare incontro alla sconfitta».

L'impressione era che Connes potesse attingere a tutto quell'armamentario di tecniche di cui si era servito per svelare una serie di misteri nascosti in altri angoli della matematica. La sua creazione della cosiddetta geometria non commutativa è stata salutata come una moderna versione della visione riemanniana della geometria, visione che ha avuto un impatto enormemente significativo sullo sviluppo della matematica nel XIX secolo. Proprio come il lavoro di Riemann aveva preparato la strada alla teoria einsteiniana della relatività, la geometria non commutativa di Connes ha dimostrato di essere un potente strumento linguistico per la comprensione delle complessità del mondo della fisica quantistica.

La nuova matematica creata da Connes è considerata come una delle pietre miliari della matematica del XX secolo e gli ha fruttato, nel 1983, il riconoscimento di una medaglia Fields. Va comunque notato che il nuovo linguaggio introdotto da Connes non è apparso improvvisamente dal nulla, ma va letto nel contesto di una rinascita della matematica francese che ha preso l'avvio negli anni della Seconda guerra mondiale. Mentre l'istituto di Princeton era cresciuto grazie all'afflusso di intellettuali che fuggivano dalle persecuzioni in atto in Europa, Connes era professore in un istituto francese, creato negli anni Cinquanta, che avrebbe aiutato Parigi a ritornare al centro della scena matematica internazionale, una posizione che – durante il regno di Napoleone – aveva perso in favore di Gottinga.

Le idee di Connes si inseriscono nel quadro di un movimento matematico che persegue una visione molto elabora-

ta e astratta di questa disciplina e dei suoi oggetti d'indagine. Nel corso degli ultimi cinquant'anni, lo stesso linguaggio della matematica è andato incontro a una profonda evoluzione che è tuttora in corso, e molti ricercatori sono convinti che fino a quando questo processo non sarà completato, non avremo a disposizione un linguaggio sufficientemente avanzato per articolare una spiegazione del perché i numeri primi si comportano secondo quanto predetto dall'ipotesi di Riemann. Questa nuova rivoluzione matematica è nata nella cella di una prigione francese durante la Seconda guerra mondiale. Da quella cella emerse un nuovo linguaggio matematico, che avrebbe ben presto dato prova delle sue potenzialità nell'esplorazione di nuovi scenari, come quello elaborato da Riemann per comprendere i numeri primi.

Parlare in molte lingue

Nel 1940, Élie Cartan ricevette una busta che gli veniva indirizzata quale direttore della prestigiosa rivista francese «Comptes Rendus». Fin dall'inizio del XIX secolo, quando Cauchy aveva pubblicato i suoi epici scritti sulla matematica dei numeri immaginari, «Comptes Rendus» era diventata una delle principali riviste su cui venivano annunciati i nuovi, entusiasmanti risultati delle ricerche. Ciò che colpì subito l'attenzione di Cartan di fronte alla busta fu l'indirizzo dal quale era stata spedita: la prigione militare Bonne-Nouvelle, a Rouen. Se non avesse riconosciuto la calligrafia del mitten-

te, Cartan avrebbe forse cestinato la busta senza neanche aprirla, pensando che si trattasse dell'ennesimo stravagante annuncio di una dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat. La calligrafia, però, era quella di un giovane matematico di nome André Weil, che aveva già la reputazione di essere una delle principali stelle della matematica francese. Cartan sapeva che, qualunque cosa Weil avesse scritto, valeva comunque la pena di leggerla.

Cartan era già stupito per il fatto di aver ricevuto una busta da una prigione militare, ma la sorpresa più grande la ebbe quando la aprì e ne vide il contenuto. Weil aveva scoperto una dimostrazione del perché, in certi paesaggi matematici, i punti a livello del mare tendono a disporsi lungo una retta. Anche se questa tecnica non funzionava nel paesaggio di Riemann, il semplice fatto che funzionasse in altri paesaggi era per Cartan sufficiente per ritenere di essere davanti a qualcosa di significativo. In seguito, il teorema di Weil divenne un faro per i matematici che cercavano una prova dell'ipotesi di Riemann. Lo stesso approccio di Connes deve molto a queste idee elaborate da Weil nella quiete della sua cella di Rouen.

L'abilità di Weil nel muoversi in alcuni di questi paesaggi, dove altri avevano fallito, può essere ricondotta alla sua vecchia passione per le lingue antiche, e specialmente per il sanscrito. Egli riteneva che lo sviluppo di nuove idee matematiche procedesse di pari passo con lo sviluppo di forme linguistiche elaborate. Per Weil non era certo una sorpresa il fatto che in India l'invenzione della grammatica avesse preceduto

quella del sistema decimale e dei numeri negativi, e che l'algebra degli arabi fosse nata dal sofisticato sviluppo della lingua araba nel periodo medievale.

Le notevoli competenze linguistiche di Weil contribuirono alla sua grande abilità nel creare un nuovo linguaggio matematico che gli permise di articolare delle sottigliezze concettuali altrimenti inesprimibili. Ma fu proprio la sua ossessione per le lingue e, in particolare, il suo amore per il *Mahabharata* – un antico testo sanscrito – che, all'inizio del 1940, condusse il giovane eminente matematico in prigione.

Il talento matematico di Weil si era manifestato chiaramente fin dall'infanzia. Di questo alunno di sei anni, la sua prima maestra diceva che «qualunque cosa gli spieghi sulla matematica, mi pare che già la sappia». Sua madre era convinta che se André fosse rimasto sempre il primo della classe, non avrebbe potuto trarre dalla scuola un adeguato stimolo intellettuale. Andò quindi dal preside, insistendo perché suo figlio venisse spostato diverse classi più avanti. Il preside, stupefatto, replicò: «Signora, è la prima volta che una madre viene da me a lamentarsi perché i voti di suo figlio sono troppo alti». Grazie all'intraprendenza di sua madre, comunque, André si ritrovò nella classe di Monsieur Monbeig.

Monbeig aveva un suo particolare approccio all'insegnamento, a cui Weil attribuisce il merito per i propri progressi nell'ambito della matematica. Per esempio, anziché far imparare la grammatica a memoria, Monbeig aveva sviluppato un complesso sistema di notazione algebrica che metteva a nudo gli schemi nascosti nelle frasi. Successivamente, quan-

do Weil incontrò le idee rivoluzionarie di Noam Chomsky sulla linguistica, non vi trovò nulla che gli sembrasse particolarmente nuovo. Weil ammise che «l'aver acquistato precoce dimestichezza con un simbolismo non banale abbia potuto avere, soprattutto per un futuro matematico, un alto valore educativo».

La matematica divenne la passione di Weil, quasi la sua droga. «Una volta che feci una brutta caduta, mia sorella Simone pensò che il modo migliore per consolarmi fosse quello di portarmi subito il mio libro di algebra.» Il talento di Weil venne notato da una delle grandi leggende della matematica francese. Jacques Hadamard, che si era fatto una reputazione all'inizio del secolo dimostrando il teorema dei numeri primi di Gauss, incoraggiò Weil a dedicarsi alla matematica; e, a sedici anni, Weil entrò alla École Normale Supérieure – una delle accademie parigine create durante la Rivoluzione francese – per iniziare i suoi studi professionali come matematico.

Mentre seguiva i corsi di matematica, Weil indulgeva anche alla sua passione per le lingue antiche. Da questo amore sarebbe poi nato un nuovo mondo matematico, ma per allora Weil voleva semplicemente imparare a leggere i poemi epici dell'antica Grecia e dell'India nelle loro lingue originali. C'era, in particolare, un poema epico che sarebbe stato al suo fianco per tutta la vita: la *Bhagavad-Gita*, il Canto di Dio contenuto nel *Mahabharata*. A Parigi, egli dedicò allo studio del sanscrito lo stesso tempo che riservava alla matematica.

Weil riteneva che l'unico modo per cogliere pienamente la bellezza di un qualunque testo (e non solo di un poema epico) fosse quello di leggerlo nella sua lingua originale. Egli pensava che anche nell'ambito della matematica occorresse mettersi a rileggere gli scritti originali dei maestri, evitando di basarsi soltanto sulle successive esposizioni delle loro opere. «Mi ero convinto che nella storia dell'umanità contano soltanto i sommi geni, e che per conoscerli l'unica cosa che vale è il contatto diretto con le loro opere» avrebbe poi scritto nella sua autobiografia *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*. È per questo motivo che si mise a studiare l'opera di Riemann. «Aver iniziato così fu per me una vera fortuna, della quale mi sono sempre rallegrato.» L'ipotesi di Riemann sulla natura dei numeri primi avrebbe pervaso la vita matematica di Weil.

Weil terminò gli esami all'École prima di raggiungere l'età in cui avrebbe dovuto prestare il servizio militare obbligatorio, e decise così di partire per un viaggio fra le grandi città matematiche d'Europa. Attraversò il continente in lungo e in largo – Milano, Copenhagen, Berlino, Stoccolma – assistendo a lezioni e parlando con i pionieri della matematica di quel periodo. A Gottinga, che non era ancora stata colpita dalle purghe accademiche di Hitler, Weil riordinò nella propria mente quelle idee che sarebbero state alla base della sua tesi di dottorato. Trovandosi nella città natale di tre dei più grandi matematici europei – Gauss, Riemann e Hilbert – a Weil sembrava ovvio che Parigi avesse ormai perso, in ambito matematico, quella reputazione di cui aveva goduto

nei grandi giorni di Fourier e di Cauchy. Ciò era in parte dovuto al fatto che molti giovani matematici francesi che avrebbero potuto diventare delle figure importanti negli anni Trenta avevano perso la vita nella Prima guerra mondiale. Una generazione era venuta meno. Nel dopoguerra, pochi dei grandi matematici tedeschi erano venuti a Parigi a presentare i loro lavori, così che la città si ritrovava disperatamente priva di idee nuove. Che cosa ne sarebbe stato della grande tradizione matematica francese, che risaliva a Fermat? Weil e alcuni altri giovani matematici decisero di prendere in mano la situazione.

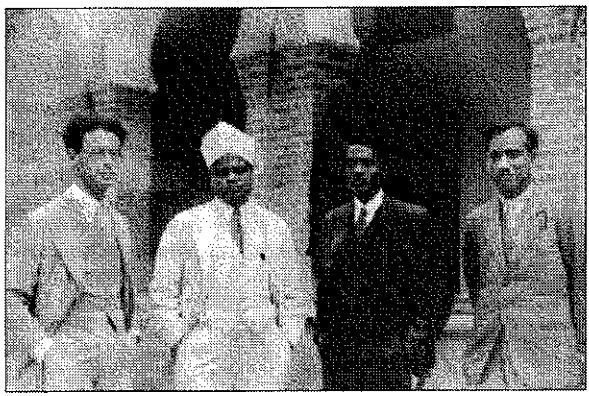
Visto che non avevano un padre attorno a cui raccogliersi, questi giovani studenti ambiziosi pensarono bene di crearsene uno: Nicolas Bourbaki. Sotto questo pseudonimo avrebbero steso collettivamente un resoconto sulla situazione della matematica contemporanea. Lo spirito che li guidava era riconducibile a ciò che rende la matematica una disciplina così unica nel quadro delle altre scienze. La matematica è infatti un edificio, costruito su assiomi, nel quale un teorema dimostrato nell'antica Grecia rimane un teorema anche oggi, nel XXI secolo. Il gruppo Bourbaki iniziò a prendere in esame le attuali condizioni di questo edificio, ed espose i propri risultati in un ampio rapporto scritto nel linguaggio della matematica moderna. Ispirandosi al grande trattato di Euclide che duemila anni prima aveva dato l'avvio alla matematica occidentale, diedero alla loro opera il titolo di *Éléments de Mathématique*. Nonostante questo retaggio greco, comunque, si trattava di un lavoro peculiarmente francese.

L'enfasi era posta sul più ampio contesto possibile per qualunque risultato. Se ciò significava perdere di vista quelle questioni specifiche per rispondere alle quali la matematica era nata, bene, era un prezzo che i giovani del gruppo erano disposti a pagare.

La scelta di «Nicolas Bourbaki» (che, in realtà, era il nome di un generale francese poco conosciuto) come vessillo sotto il quale sferrare il loro assalto matematico trova le proprie radici in un rituale seguito all'École Normale all'inizio del XX secolo. Le matricole affrontavano una cerimonia di iniziazione nel corso della quale uno studente degli ultimi anni di corso, fingendo di essere un celebre professore in visita presso l'accademia, teneva un'articolata lezione su alcuni famosi teoremi matematici. Il «professore» inseriva deliberatamente degli errori in alcune delle dimostrazioni da lui presentate, e le matricole dovevano identificarli. L'indizio era dato dal fatto che i teoremi con questi errori erano (a torto) attribuiti a ignoti generali francesi anziché ai loro effettivi autori.

Gli incontri di questi giovani matematici francesi erano qualcosa di anarchico e di caotico. Uno dei fondatori del gruppo, Jean Dieudonné, raccontò che «quando qualcuno veniva invitato ad assistere alle riunioni del circolo di Bourbaki, ne usciva sempre con l'impressione che si trattasse di una gabbia di matti. Non riuscivano a immaginare come queste persone, gridando anche in tre o quattro per volta, potessero mai approdare a qualche conclusione intelligente». I membri del gruppo Bourbaki credevano invece che questo

carattere anarchico fosse indispensabile perché il loro progetto potesse funzionare. Nella loro battaglia per dare una veste unitaria alla matematica contemporanea, iniziò a emergere quel nuovo linguaggio che Weil avrebbe poi sviluppato.



André Weil (1906-1998) ad Aligarh, in India, con Vijayaraghavan (accanto a lui) e due studenti, in una foto del 1931.

Fu il suo amore per le lingue antiche e la letteratura sanscrita a portare Weil, nel 1930, al suo primo incarico accademico, come professore all'università musulmana di Aligarh, non lontano da Delhi. Inizialmente l'università aveva in progetto di assegnargli il corso di cultura francese, ma all'ultimo momento decise di fargli insegnare matematica. Durante il periodo trascorso in India, Weil incontrò Gandhi. L'esposizione alla filosofia gandhiana, assieme alla sua lettura della *Gita*, avrebbero avuto fatali conseguenze per Weil al

suo ritorno in un'Europa che si preparava per la guerra. Nella *Gita*, Krishna raccomanda ad Arjuna di agire in conformità col proprio *dharma*, il suo personale codice di comportamento. Per Arjuna, che apparteneva alla casta dei guerrieri, ciò significava combattere nonostante l'inevitabile devastazione che la guerra avrebbe portato con sé. Weil sentiva che il proprio *dharma* gli diceva l'opposto, e cioè di mantenersi fedele alle proprie convinzioni pacifiste. Decise quindi che, se fosse scoppiata la guerra, avrebbe evitato la chiamata alle armi nell'esercito francese fuggendo in un Paese neutrale.

Durante l'estate del 1939, si recò in Finlandia assieme a sua moglie. Weil sperava che la Finlandia sarebbe stata un buon trampolino di lancio per fuggire poi in America, ma il suo fu un grave errore. La notte del 23 agosto 1939, Stalin firmò un patto di non aggressione con la Germania nazista: in cambio della neutralità sovietica, Hitler prometteva a Stalin che gli avrebbe lasciato mano libera in Estonia, Lettonia, Polonia orientale e Finlandia. Allo scoppio della guerra, nel settembre del 1939, il governo finlandese sapeva che ben presto anche la Finlandia sarebbe stata invasa; tutto ciò che aveva a che fare con l'Unione Sovietica era quindi guardato con il massimo sospetto. Così, quando le autorità si imbatterono in alcune lettere – piene di incomprensibili equazioni – spedite a indirizzi sovietici da uno straniero francese, saltarono subito alla conclusione che questo straniero lavorasse per il nemico. Nel settembre del 1939, il francese venne arrestato con l'accusa di essere una spia al servizio di Mosca. La sera prima della data fissata per l'esecuzione, il capo della polizia,

in occasione di una cena di Stato, si trovò seduto a fianco di un matematico dell'università di Helsinki, Rolf Nevanlinna.

Arrivati al caffè, il capo della polizia si rivolse a Nevanlinna. «Domani fuciliamo una spia che sostiene di conoscervi. Non mi sarei permesso di disturbarla per così poco; ma, visto che la vedo qui stasera, colgo l'occasione per avere il suo parere.» «Come si chiama?» chiese l'accademico. «André Weil» rispose l'ufficiale. Nevanlinna rimase a bocca aperta. Durante l'estate, aveva ospitato Weil e sua moglie nella propria casa di campagna, in riva al lago. «È proprio necessario fucilarlo?» chiese. «Non potete semplicemente portarlo fino alla frontiera e quindi espellerlo?» «È un'idea: non ci avevo pensato.» E, grazie a questo incontro fortuito, a Weil venne risparmiata una pallottola e alla matematica venne risparmiata la perdita di uno dei suoi più grandi rappresentanti del XX secolo.

Nel febbraio del 1940, Weil era così nuovamente in Francia, anche se si trovava a languire in una prigione di Rouen in attesa di essere processato per diserzione. Uno dei piaceri della matematica consiste nel fatto che, per dedicarsi a essa, non servono molti strumenti: bastano carta, penna e immaginazione. La prigione forniva i primi due strumenti e, quanto al terzo, Weil ne aveva da vendere. Nella sua nativa Norvegia, Selberg aveva trovato nell'isolamento imposto negli anni della guerra la condizione perfetta per dedicarsi alla matematica. Lavorando in India come contabile, Ramanujan aveva sviluppato le sue incredibili doti matematiche pur senza avere accesso a una formazione di tipo formale.

Scherzando con Weil, uno degli studenti di Hardy, Vijayaraghavan (che era stato collega di Weil in India), aveva più volte ripetuto che «se potessi passare sei mesi o un anno in prigione, sarei quasi certamente in grado di dimostrare l'ipotesi di Riemann». All'improvviso, Weil ebbe l'occasione di mettere direttamente alla prova le affermazioni di Vijayaraghavan.

Riemann aveva costruito un paesaggio in cui i punti a livello del mare custodiscono i segreti del comportamento dei numeri primi. Per dimostrare l'ipotesi di Riemann, Weil doveva spiegare perché questi punti a livello del mare si trovavano a essere allineati su una retta. Fece diversi tentativi per orientarsi nel paesaggio di Riemann, senza però avere successo. Ma dopo la scoperta da parte di Riemann del cunicolo che collega i numeri primi alla sua superficie zeta, i matematici si sono imbattuti in una serie di paesaggi simili che li hanno aiutati a spiegare altri problemi della teoria dei numeri. Era tale la potenzialità insita in questi diversi paesaggi – ciascuno definito da una variante della funzione zeta – che essi stavano ormai iniziando a diventare quasi degli oggetti di culto. Il loro uso come metodo di risoluzione dei problemi della teoria dei numeri sarebbe poi divenuto talmente universale che Selberg ebbe a dire che pensava occorresse ratificare un trattato di messa al bando della proliferazione delle funzioni zeta.

Fu proprio mentre stava esplorando alcuni di questi paesaggi che Weil scoprì un metodo in grado di spiegare perché in essi i punti a livello del mare tendono ad allinearsi lungo

una retta. I paesaggi in cui Weil riuscì nella sua impresa non avevano a che fare con i numeri primi, ma custodivano la chiave per calcolare quante fossero le soluzioni di un'equazione del tipo $y^2 = x^3 - x$ lavorando su uno dei calcolatori a orologio di Gauss. Prendiamo, per esempio, questa equazione e un calcolatore a orologio con cinque ore sul quadrante. Se nella parte destra dell'equazione poniamo x uguale a 2, avremo $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$, che sul nostro orologio con cinque ore corrisponderà all'una. Similmente, ponendo y uguale a 4 nella parte sinistra dell'equazione, otteniamo 16, che sul nostro orologio corrisponderà di nuovo all'una. Questo risultato, che possiamo scrivere nella forma $(x, y) = (2, 4)$, è detto una soluzione dell'equazione, poiché entrambi i lati dell'equazione stessa vengono a coincidere se inseriamo i valori 2 e 4 nel nostro calcolatore a orologio con cinque ore sul quadrante. Ci sono, in effetti, sette diverse coppie possibili di numeri (x, y) che rendono vera la nostra equazione:

$$(x, y) = (0, 0), (1, 0), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 0)$$

Che cosa accadrebbe se scegliessimo un orologio con un altro numero primo p di ore sul quadrante? Le coppie di numeri in grado di soddisfare l'equazione sarebbero approssimativamente p, pur non coincidendo esattamente con p. Proprio come la stima logaritmica di Gauss per il numero di numeri primi oscilla al di sopra e al di sotto del vero numero di numeri primi, così anche il numero p sovrastima o sottostima il vero numero delle soluzioni dell'equazione. In effet-

ti, era stato lo stesso Gauss – nell'ultima annotazione del suo diario matematico – a dimostrare per primo, a proposito di questa particolare equazione, che l'errore nella stima non sarebbe stato superiore al doppio della radice quadrata di p. Gauss si era però servito di metodi *ad hoc* che non funzionerebbero con altre equazioni; la bellezza della dimostrazione di Weil sta invece nel fatto che si applica a qualunque equazione costruita sulle variabili x e y. Dimostrando che i punti a livello del mare nel paesaggio zeta di ogni equazione giacciono su una retta, Weil aveva generalizzato la scoperta di Gauss che, come ordine di grandezza, l'errore nella stima non sarebbe mai stato superiore alla radice quadrata di p.

Pur non essendo direttamente collegata all'ipotesi di Riemann sui numeri primi, la dimostrazione di Weil rappresentava comunque una svolta importante dal punto di vista psicologico. Egli aveva infatti trovato un modo per mostrare che i punti a livello del mare in un paesaggio costruito su equazioni quali $y^2 = x^3 - x$ giacciono tutti su una linea retta. La ragione dell'entusiasmo di Cartan quando aprì il pacchetto di Weil e si trovò davanti la dimostrazione era proprio che vi scorgeva l'aiuto che queste nuove tecniche avrebbero potuto fornire per comprendere il paesaggio originario di Riemann.

Weil aveva mosso i primi passi verso la creazione di un linguaggio totalmente nuovo con cui comprendere le soluzioni delle equazioni. Una scuola di matematici italiani, basata a Roma e guidata da Francesco Severi e Guido Castelnuovo, aveva già iniziato a fare qualcosa di simile, e Weil era

venuto a conoscenza del loro lavoro durante il suo viaggio fra le città europee. Ma queste basi gettate dagli italiani erano ancora qualcosa di decisamente instabile, e non sarebbero state in grado di sostenere quella matematica di cui Weil aveva bisogno. Le idee di Weil divennero le fondamenta di ciò che oggi chiamiamo geometria algebrica, che è al centro della dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat.

Lavorando con questo nuovo linguaggio, Weil era in grado di costruire per ciascuna equazione una specie molto particolare di tamburo matematico. Questo tamburo aveva un numero finito di frequenze, in contrasto con le infinite frequenze dei tamburi fisici e con gli infiniti livelli energetici della fisica quantistica. Le frequenze del tamburo di Weil segnavano con precisione le coordinate dei punti a livello del mare nel paesaggio dell'equazione corrispondente. Gli fu però necessario molto altro lavoro per far sì che quei punti si posizionassero lungo una retta. Non si trattava più di frequenze che rispecchiavano i livelli energetici della fisica quantistica, dove uno zero al di fuori dalla linea si sarebbe potuto scartare in quanto avrebbe significato un livello d'energia immaginario, cioè una cosa che la teoria fisica proibiva. Gli serviva qualcosa di diverso per costringere gli zeri a cadere su una linea retta.

Mentre sedeva nella sua cella ascoltando il tamburo che aveva costruito, all'improvviso gli venne in mente che aveva già l'ultima tessera del puzzle, quella che avrebbe spiegato perché le frequenze di questo tamburo sono allineate lungo una retta. Durante il suo viaggio attraverso l'Europa, dopo la

laurea, era venuto a conoscenza di un teorema derivato dal matematico italiano Guido Castelnuovo, un teorema che si dimostrò di importanza cruciale nel forzare gli zeri di quei paesaggi delle equazioni ad allinearsi in modo ordinato. Senza il felice aiuto fornito dai risultati di Castelnuovo, questi paesaggi sarebbero potuti rimanere inaccessibili al pari di quello di Riemann. Come ammette Peter Sarnak a Princeton, «il fatto che Weil riuscì a far funzionare la sua dimostrazione fu in un certo senso un miracolo».

Almeno in parte, Weil era riuscito a realizzare il sogno di Vijayaraghavan. Anche se non era venuto a capo dell'ipotesi di Riemann sui numeri primi, aveva comunque trovato un modo per dimostrare che i punti a livello del mare in paesaggi analoghi tendono a disporsi lungo una retta. Il 7 aprile 1940 scrisse a sua moglie Éveline dicendole: «Nella mia matematica faccio progressi superiori a tutte le mie aspettative; sono persino un po' preoccupato, perché se lavoro così bene in prigione, non sarà il caso che mi organizzi per passarvi ogni anno due o tre mesi?». In condizioni normali, Weil avrebbe aspettato prima di pubblicare qualcosa, ma in quella situazione il futuro era troppo incerto per rischiare; preparò quindi una nota per «Comptes Rendus» e la spedì a Élie Cartan.

In una lettera dal carcere, Weil raccontò a sua moglie a proposito di quella nota: «Ne sono davvero soddisfatto, specialmente perché è qui che l'ho scritta (il che è abbastanza inusitato nella storia della matematica), e anche perché essa rappresenta un buon modo per far sapere a tutti i miei amici

matematici sparsi per il mondo che ancora esisto. Sono incantato della bellezza dei miei teoremi». Dopo aver letto il suo manoscritto, il figlio di Élie, Henry – un matematico amico e coetaneo di Weil – gli rispose con una lettera in cui scriveva con invidia: «Non tutti abbiamo la tua fortuna di poter lavorare indisturbati...».

Élie Cartan non vedeva l'ora di pubblicare lo scritto. Il 3 maggio 1940, questo fecondo periodo di prigionia di Weil finì. Cartan testimoniò al processo, descritto da Weil come «una commedia mal recitata». Weil fu condannato a cinque anni di prigione per renitenza alla leva, ma se avesse accettato di prestare servizio militare al fronte la condanna sarebbe stata sospesa. Nonostante gli ottimi risultati matematici ottenuti durante il periodo trascorso nel carcere di Rouen, Weil accettò di entrare nell'esercito. Col senno di poi, fu una scelta particolarmente avveduta: un mese dopo, di fronte all'avanzata delle truppe tedesche, i francesi fucilarono tutti i prigionieri di Rouen, in modo da velocizzare – si dice – la ritirata della guardia.

Servendosi di un falso certificato medico che aveva ottenuto in Inghilterra, nel 1941 Weil riuscì a farsi esonerare per una polmonite. Ottenne quindi i visti per sé e per la sua famiglia per andare in America, dove si incontrò con Siegel all'Institute for Advanced Study di Princeton. I due avevano fatto amicizia durante il viaggio di Weil attraverso l'Europa. Quando Siegel si era recato a visionare gli appunti inediti di Riemann e aveva scoperto la sua formula segreta per il calcolo degli zeri, Weil lo aveva accompagnato. Siegel

era ovviamente ansioso di capire se fosse possibile estendere alla comprensione del paesaggio originario di Riemann l'approccio usato da Weil per orientasi in un paesaggio matematico analogo.

In molti – fra cui lo stesso Siegel – credevano che ciò che aveva fatto sì che la dimostrazione di Weil funzionasse su di un paesaggio in particolare, avrebbe dovuto fornire un indizio fondamentale nella ricerca di quello che era il vero Graal: l'ipotesi di Riemann. Weil cercò per anni di individuare l'elusivo collegamento con il paesaggio creato da Riemann; ma, sfortunatamente, da uomo libero non incontrò più quel successo che gli aveva sorriso nella prigione di Rouen. Possiamo percepire la malinconia di Weil nelle parole con cui, successivamente, descrisse il suo desiderio di rivivere l'impeto di quella sua prima scoperta: «Tutti i matematici degni di questo nome hanno sperimentato [...] quello stato di lucida esaltazione in cui un pensiero segue all'altro in modo quasi miracoloso [...] questa sensazione può protrarsi per ore, a volte anche per giorni. Quando uno l'ha provata, vorrebbe poterla ripetere, ma è incapace di farlo a suo piacimento, se non forse gettandosi a capofitto nel lavoro [...]».

In un'intervista per «La Science», nel 1979, venne chiesto a Weil quale teorema avrebbe maggiormente voluto dimostrare. Rispose che «in passato, a volte, mi sono detto che, se fossi riuscito a dimostrare l'ipotesi di Riemann – che era stata formulata nel 1859 – avrei tenuto nascosti i miei risultati fino al 1959, in modo da poterli rivelare soltanto in occasione del suo centenario». Ma, nonostante tutti gli sforzi, non

approdò ad alcun risultato. «Dopo il 1959, mi sono accorto di essere ancora molto lontano da una soluzione; e gradualmente, anche se con rammarico, mi sono arreso.»

Per tutta la vita, Weil rimase in stretto contatto con Goro Shimura, uno dei matematici giapponesi che formularono la congettura risolta da Andrew Wiles mentre procedeva verso la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat. Shimura rammenta come Weil gli abbia detto, in età avanzata: «Mi piacerebbe vedere l'ipotesi di Riemann dimostrata prima di morire, ma devo ammettere che si tratta di un'eventualità improbabile». Shimura ricorda anche una conversazione che ebbero a proposito di Charlie Chaplin. Da giovane, Chaplin era stato da un indovino che gli aveva accuratamente predetto che cosa gli avrebbe riservato il futuro. Scherzando malinconicamente, Weil disse: «Beh, nella mia autobiografia io potrei scrivere che, da giovane, un indovino mi aveva predetto che non sarei mai riuscito a risolvere l'ipotesi di Riemann».

Anche se il sogno di Weil di dimostrare l'ipotesi di Riemann – o perlomeno di vederla dimostrata – non si è avverato, la sua opera rimane indubbiamente di un'importanza fondamentale. La dimostrazione di Weil ha dato ai matematici un po' di speranza circa la possibilità conquistare la vetta del monte Riemann. Inoltre, ha alimentato la loro fede nella fondatezza dell'intuizione di Riemann. Se i punti a livello del mare si allineano in un paesaggio zeta, è lecito sperare che facciano altrettanto nel paesaggio dei numeri primi. Inoltre, per orientarsi nel suo paesaggio Weil aveva anche fatto ricorso a uno strano tamburo matematico, e questo

molto tempo prima che le connessioni con il caos quantistico ci dicessero che si trattava di un buon metodo per cercare una soluzione. Per dirla con Peter Sarnak, «il risultato ottenuto da Weil è diventato il faro che ci guida nella nostra ricerca di una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann».

Il nuovo linguaggio matematico di Weil, la geometria algebrica, lo aveva messo in grado di articolare delle sottigliezze concettuali – circa le soluzioni delle equazioni – che altrimenti sarebbero rimaste inesprimibili. Ma se c'era una qualche speranza di estendere le idee di Weil in modo da dimostrare l'ipotesi di Riemann, era chiaro che quelle idee andavano sviluppate oltre le basi che egli aveva gettato mentre si trovava nella sua cella di Rouen. Sarebbe stato un altro matematico parigino a dar vita all'ossatura del nuovo linguaggio ideato da Weil. Il grande artefice di questa impresa fu uno dei matematici più bizzarri e più rivoluzionari del XX secolo: Alexandre Grothendieck.

Una nuova Rivoluzione francese

Napoleone aveva forgiato la propria rivoluzione accademica creando delle istituzioni come l'École Polytechnique e l'École Normale Supérieure. Tuttavia, l'eccessiva enfasi posta su una matematica al servizio delle necessità dello Stato aveva fatto sì che Parigi perdesse la propria centralità nel quadro della matematica internazionale a vantaggio di Gottinga, dove l'approccio più astratto di Gauss e Riemann era libero

di svilupparsi e fiorire. Nella seconda metà del XX secolo si diffuse però in Francia una nuova ventata di ottimismo circa la possibilità che Parigi riconquistasse la propria posizione di primo piano nel mondo della matematica.

Grazie all'iniziativa di un emigrato russo, l'industriale Léon Motchane, che nutriva una passione per la scienza, e con la guida accademica di alcune figure chiave del gruppo Bourbaki, si decise di creare un nuovo istituto che si sarebbe ispirato al brillante esempio dell'Institute for Advanced Study di Princeton. A differenza delle accademie napoleoniche, questo nuovo istituto non sarebbe stato sotto il controllo statale. Fondato da un'impresa privata, l'Institut des Hautes Études Scientifiques venne inaugurato nel 1958. I suoi edifici sono nascosti fra i boschi di Bois-Marie, non molto lontano da Parigi. Nel corso degli anni, ha realizzato i sogni dei suoi creatori. Marcel Boiteux, un ex rettore dell'istituto, lo ha descritto come «un radioso focolare, un alveare pieno di vita, e un monastero, dove i semi, piantati in profondità, possono germogliare e raggiungere la maturità secondo i propri ritmi naturali». Uno dei primi professori a insegnare presso l'istituto fu una giovane stella della matematica che rispondeva al nome di Alexandre Grothendieck. Questo primo seme sarebbe fiorito nel modo più spettacolare.

Grothendieck è un matematico austero. Il suo ufficio all'istituto era del tutto disadorno, a parte un dipinto a olio di suo padre. Questo quadro era stato dipinto da un compagno di prigionia del padre in uno dei campi dove era stato internato prima di essere trasferito ad Auschwitz, dove morì nel

1942. Grothendieck aveva preso da suo padre la fiera espressione di quegli occhi che risplendevano nel volto del ritratto, dove era raffigurato con la testa rasata.

Anche se non aveva mai conosciuto direttamente suo padre, la devozione con cui sua madre gliene aveva parlato aveva sortito un profondo effetto su Grothendieck. Come ebbe a commentare lui stesso, la vita di suo padre potrebbe esser presa per illustrare gli eventi importanti delle rivoluzioni europee dal 1900 al 1940: dalla rivoluzione bolscevica dell'ottobre del 1917 – di cui era stato uno dei capi – agli scontri armati con i nazisti nelle strade di Berlino, all'arruolamento nelle milizie anarchiche durante la guerra civile spagnola. Alla fine i nazisti riuscirono a prenderlo in Francia, grazie al governo di Vichy che lo aveva loro consegnato come ebreo.

Alexandre Grothendieck, professore all'Institut des Hautes Études Scientifiques fino al 1970.

Grothendieck avrebbe portato avanti la sua rivoluzione non sul campo di battaglia politico ma nell'ambito della matematica. Prendendo come base i primi tentativi di Weil, egli mise a punto un nuovo linguaggio matematico. Come le nuove intuizioni di Riemann avevano segnato un punto di svolta nella matematica, il nuovo linguaggio della geometria e dell'algebra elaborato da Grothendieck vide la creazione di una dialettica interamente nuova, che permise ai matematici di articolare idee precedentemente inesprimibili. Ciò può essere paragonato alle nuove prospettive che si erano dischiuse alla fine del XVIII secolo, quando i matematici finirono per accettare il concetto di numeri immaginari. Ma questo nuovo linguaggio non era affatto facile da apprendere. Anche lo stesso Weil rimase assai sconcertato di fronte al nuovo mondo astratto di Grothendieck.

L'Institut des Hautes Études Scientifiques divenne la sede postbellica naturale del progetto Bourbaki, che era ancora impegnato a produrre ulteriori volumi della sua indagine enciclopedica sulla matematica moderna. Grothendieck divenne uno dei suoi collaboratori principali. Quando i primi membri del gruppo raggiunsero i cinquant'anni, si ritirarono da Bourbaki e si aprì la caccia a nuove reclute, giovani matematici francesi che prendessero il loro posto. Più di ogni altra iniziativa, furono proprio le pubblicazioni di Bourbaki che aiutarono la Francia a recuperare la propria posizione centrale per la matematica internazionale. Molti matematici credevano che Bourbaki fosse una persona vera e propria; e Bourbaki, dal canto suo, fece anche ri-

chiesta per diventare membro della American Mathematical Society.

Al di fuori dei confini francesi, in molti avevano criticato l'effetto di Bourbaki sulla matematica, lamentando la sua selettività riguardo a ciò che aveva scelto di documentare. Questi critici ritenevano che Bourbaki avesse reso sterile la ricerca matematica presentando questa disciplina come un prodotto finito anziché come un organismo in evoluzione. La sua enfasi sulla più ampia universalità possibile faceva perdere di vista le eccentricità e gli aspetti spesso particolari di questa disciplina. Ma Bourbaki ritiene che il suo progetto sia stato male interpretato. I tomi che portano il suo nome sono lì a confermare la solidità della nostra posizione odierna. Essi sono stati concepiti come una nuova versione degli *Elementi*, come un equivalente moderno di quel punto di partenza che Euclide ci aveva fornito duemila anni fa.

La vecchia guardia, composta dai matematici che erano già attivi prima della Seconda guerra mondiale, iniziò a lamentarsi di non riconoscere più quella disciplina a cui avevano lavorato per così tanti anni. Siegel commentò in questo modo una presentazione della sua opera, tradotta nel nuovo linguaggio:

> Rimasi disgustato dal modo in cui il mio contributo alla questione era stato sfigurato e reso incomprensibile. L'intero stile [...] contraddice quel senso di semplicità e onestà che ammiriamo nelle opere dei maestri della teoria dei numeri –

> Lagrange, Gauss o, su una scala più piccola, Hardy e Landau. Mi sembra di vedere un maiale che entra in uno splendido giardino e si mette a sradicare fiori e piante.

Siegel era pessimista sul futuro della matematica di fronte a un'astrazione di questo genere: «Temo che, se non riusciremo a bloccare l'attuale tendenza a sviluppare un'astrazione priva di senso – o, come la chiamo io, una teoria dell'insieme vuoto – la matematica morirà prima della fine di questo secolo».

Erano in molti a condividere questo punto di vista. Selberg descrisse le proprie impressioni dopo aver assistito a una conferenza in cui veniva presentato, a grandi linee, lo schema astratto di una possibile dimostrazione dell'ipotesi di Riemann. «Ciò che pensavo era che non si erano mai viste conferenze di questo tenore. Al termine, feci partecipe qualcuno di un pensiero che mi era venuto in mente: se i desideri fossero cavalli, anche i mendicanti potrebbero cavalcare.» Nella conferenza, era stata presentata un'intera impalcatura di ipotesi astratte. Se bastasse il semplice linguaggio per risolvere la teoria dei numeri primi, allora il matematico che tenne quella conferenza sarebbe riuscito a dimostrare l'ipotesi di Riemann. Ma, come sottolinea Selberg, «egli in realtà non possedeva nessuna di quelle ipotesi che voleva. Questo, probabilmente, non è il modo giusto di affrontare la matematica. Bisognerebbe cercare di partire da qualcosa che riusciamo veramente ad afferrare e comprendere. Quel discorso conteneva molte cose interessanti, ma è un esempio di una tendenza che io reputo molto pericolosa».

Per Grothendieck, tuttavia, non si trattava di un'astrazione fine a se stessa. Dal suo punto di vista, era una rivoluzione resa necessaria dalle stesse domande a cui la matematica stava cercando di rispondere. Egli scrisse un volume dopo l'altro descrivendo questo nuovo linguaggio. Grothendieck aveva una visione messianica, e iniziò ad attrarre una schiera di giovani discepoli fedeli. La sua produzione scientifica è stata qualcosa di immenso, intorno alle diecimila pagine. Quando un visitatore gli fece notare che la biblioteca dell'istituto non fosse molto fornita, egli replicò: «Qui non leggiamo libri, li scriviamo».

Gödel aveva parlato della necessità di espandere le fondamenta della matematica per poter padroneggiare l'ipotesi di Riemann. Il nuovo linguaggio rivoluzionario di Grothendieck era il primo passo in questa direzione; ma, nonostante tutti i suoi sforzi, l'ipotesi di Riemann restava una meta irraggiungibile, alimentando la sua frustrazione. La sua rivoluzione rispondeva a numerosi altri problemi, comprese le importanti congetture di Weil sul numero di soluzioni delle equazioni, ma non a questo.

In ultima analisi, la responsabilità del fallimento di Grothendieck nel suo tentativo di scalare la vetta del monte Riemann è imputabile al passato politico di suo padre. Grothendieck fece del suo meglio per vivere in linea con gli ideali politici di suo padre. Divenne un irriducibile pacifista, facendo a gran voce campagna contro il riarmo degli anni Sessanta. Denunciò con forza il peggioramento della situazione politica in Russia – al punto che quando, nel 1966, gli

venne conferita la medaglia Fields per i progressi da lui portati nel campo della geometria algebrica, si rifiutò di andare a Mosca a ritirare il premio, come gesto di protesta contro l'escalation militare sovietica.

Tutto il tempo speso a esplorare il mondo della matematica aveva fatto sì che, sul piano politico, Grothendieck fosse rimasto su posizioni alquanto ingenue. Quando gli venne mostrato un poster che pubblicizzava una conferenza sponsorizzata dalla NATO, alla quale avrebbe dovuto partecipare nella veste di uno degli oratori più importanti, Grothendieck chiese – con una beata innocenza – che cosa significasse la sigla «NATO». Non appena gli spiegarono che si trattava di un'organizzazione militare, scrisse una lettera agli organizzatori minacciando di non presentarsi. (Pur di convincerlo a partecipare, gli organizzatori rinunciarono ai soldi della sponsorizzazione). Nel 1967, Grothendieck tenne un breve corso di geometria algebrica astratta davanti a un pubblico che lo fissava stupefatto: si trovavano nella giungla del Vietnam del Nord, dove l'università di Hanoi era stata evacuata durante i bombardamenti. Egli vedeva queste sue lezioni, piene di idee astruse, come una forma di protesta contro la guerra che infuriava a pochi metri.

Le cose giunsero a un punto critico nel 1970, quando Grothendieck scoprì che una parte dei finanziamenti privati dell'istituto venivano da fonti militari. Andò dritto dal direttore, Léon Motchane, minacciando di dimettersi. Motchane – che più di ogni altro aveva contribuito alla creazione dell'istituto – non era però una persona arrendevole come gli or-

ganizzatori di quella conferenza di qualche anno prima. Grothendieck, dal canto suo, rimase fedele ai propri principi e se ne andò. Quelli che lo conoscono da vicino ritengono che, forse, abbia preso la scusa dei finanziamenti militari per fuggire da quella gabbia dorata in cui l'istituto si era trasformato. Grothendieck si vedeva ormai soltanto come un mandarino matematico al servizio dell'establishment. Egli era più felice nel ruolo di emarginato: odiava l'idea di restarsene comodo all'interno del sistema. C'è poi anche il fatto che aveva quarantadue anni. Il mito secondo cui un matematico a quarant'anni ha ormai dato il meglio di sé iniziava a preoccuparlo. E se il resto della sua vita matematica fosse stato privo di creatività? Non era il tipo da mettersi a dormire sugli allori del passato. Inoltre, la sua disillusione di fronte al fatto che non riusciva a far progressi nello studio dei punti a livello del mare cresceva di giorno in giorno. Nell'agiatezza dell'istituto, Grothendieck non aveva fatto più passi avanti di quanti ne aveva fatti Weil nella sua cella di Rouen. Quando abbandonò l'Institut des Hautes Études Scientifiques, abbandonò praticamente la matematica.

Grothendieck iniziò ad andare alla deriva. Mise in piedi un gruppo, chiamato Survive, impegnato su temi antimilitaristi e ambientali. Iniziò a praticare il buddismo con un fervore in cui i suoi antenati cassidici si sarebbero pienamente riconosciuti. L'amarezza che provava di fronte al fatto di non essere stato in grado di dar completezza alla propria visione matematica traboccò in una straordinaria autobiografia di mille pagine, nella quale si scagliava violentemente contro

ciò che era stato fatto della sua eredità matematica. Non riusciva ad accettare che i suoi discepoli fossero ora i nuovi leader della rivoluzione da lui ispirata, e che mettessero su di essa la loro firma.

Oggi – circa trent'anni dopo essersene andato dall'istituto – Grothendieck vive in un villaggio sperduto sui Pirenei. Stando a una coppia di matematici che sono andati a trovarlo qualche anno fa, «è ossessionato dal diavolo, che vede all'opera in ogni angolo del mondo, impegnato a distruggere l'armonia divina». Fra le altre cose, accusa il diavolo di aver cambiato la velocità della luce dal bel valore preciso di 300.000 km/s all'"orribile" 299.887 km/s. Tutti i matematici devono essere un po' folli per potersi sentire a casa nel mondo matematico. Tutte le ore che Grothendieck aveva trascorso a esplorare i confini del mondo della matematica lo avevano reso incapace di ritrovare la strada di casa.

Grothendieck non è l'unico matematico a essere impazzito mentre cercava di dimostrare l'ipotesi di Riemann. Verso la fine degli anni Cinquanta, dopo i suoi primi successi, John Forbes Nash si lasciò affascinare dalla prospettiva di dimostrare l'ipotesi di Riemann. Stando alla biografia di Nash scritta da Sylvia Nasar, *Il genio dei numeri*, la gente «spettegolava che Nash fosse innamorato di Cohen», che a sua volta stava combattendo con l'ipotesi di Riemann. Nash parlò ampiamente con Paul Cohen delle proprie idee in proposito, ma Cohen non vi scorse nessuno sbocco possibile. Alcuni credono che il rifiuto di Cohen – sia sul piano emotivo, sia su quello matematico – contribuì al seguente declino delle

facoltà mentali di Nash. Nel 1959 venne invitato a presentare le sue idee per una soluzione dell'ipotesi di Riemann a un convegno della American Mathematical Society presso la Columbia University di New York. Fu un disastro. Il pubblico sedeva in attonito silenzio mentre Nash uscì di testa davanti ai loro occhi, presentando una serie di argomentazioni prive di senso con la pretesa che fossero delle dimostrazioni dell'ipotesi di Riemann. Gli esempi di Grothendieck e Nash illustrano i pericoli dell'ossessione matematica. (A differenza di Grothendieck, Nash riuscì a rinsavire; nel 1994 gli fu assegnato il Nobel per l'economia per i suoi contributi matematici alla teoria dei giochi.)

Se Grothendieck è andato incontro al collasso psicologico, la struttura matematica da lui creata rimane però in piedi. Molti credono che le idee cruciali che ancora ci mancano estenderanno la rivoluzione di Grothendieck e sveleranno infine i misteri dei numeri primi. Verso la metà degli anni Novanta, fra la comunità matematica iniziò a circolare una voce: forse si era vicini a trovare il successore di Grothendieck.

L'ultima risata

Quando iniziò a diffondersi la voce che Alain Connes stava lavorando sull'ipotesi di Riemann, molti inarcarono le sopracciglia. Connes, professore all'Institut des Hautes Études Scientifiques e al Collège de France, è un peso massimo con

una reputazione pari a quella di Grothendieck. Anzi, in effetti, la sua invenzione della geometria non commutativa va oltre la geometria di Weil e Grothendieck. Connes, come Grothendieck, riesce a vedere una struttura dove gli altri vedono soltanto il caos.

In matematica, «non commutativo» significa che l'ordine in cui si fa qualcosa è fondamentale. Per esempio, provate a prendere una foto quadrata del volto di qualcuno e a metterla a testa in giù. Prima capovolgetela da destra a sinistra e quindi fatela ruotare di novanta gradi in senso orario. Ripetete l'esperimento, ma questa volta fate ruotare la foto prima di capovolgerla (anche in questo caso, assicurandovi di capovolgerla da destra verso sinistra), e vi accorgerete che ora la faccia è girata nel senso opposto. Dipende da quale operazione fate per prima. Lo stesso principio sta al centro di molti dei misteri della fisica quantistica. Il principio di indeterminazione di Heisenberg dice che non possiamo mai conoscere con precisione la posizione e, insieme, la velocità di una particella. La ragione matematica alla base di questa indeterminazione è che il risultato dipende dall'ordine in cui vengono misurate la posizione e la velocità.

Connes ha portato la geometria algebrica di Weil e Grothendieck in regioni della matematica dove queste simmetrie vengono meno, rivelando un mondo matematico completamente nuovo. Se la maggior parte dei matematici passano la vita cercando di raggiungere una migliore comprensione delle strutture matematiche già note, di tanto in tanto – ogni qualche generazione – sopraggiunge un esplo-

ratore in grado di uscire da tali schemi e scoprire continenti sconosciuti. Connes è uno di questi esploratori.

In queste esplorazioni, Connes mette tutta la sua passione. Il suo amore per questa disciplina risale a quando, all'età di sette anni, si mise per la prima volta a riflettere su dei problemi matematici elementari. «Ricordo molto chiaramente l'intenso piacere che provavo immergendomi in quel particolare stato di concentrazione necessario per applicarsi alla matematica.» Si direbbe che Connes non sia mai emerso da questa trance. E nonostante tutte le sue teorie e le sue astrazioni, che potrebbero intimidire chi le osserva, è rimasto in lui qualcosa di quella giocosità fanciullesca che aveva a sette anni. Per Connes è la matematica ciò che più di ogni altra cosa può avvicinarci a un concetto della verità ultima. E, fin da ragazzo, la gioiosa ricerca di questo fine è stata una componente fondamentale della sua dedizione alla matematica. Per dirlo con le sue parole, dato che «la realtà matematica non può collocarsi nello spazio o nel tempo, proprio attraverso questo senso di eternità che produce, essa è in grado di offrirci – quando siamo abbastanza fortunati da scoprirne anche i più piccoli dettagli – una sensazione di straordinario piacere».

Egli descrive il matematico come una persona sempre attiva, sempre alla ricerca di nuovi territori in cui penetrare. Se altri si limiteranno a navigare in prossimità delle coste delle terre conosciute, Connes si lascerà alle spalle l'orizzonte matematico familiare e veleggerà verso acque ignote, al di là delle nostre attuali conoscenze matematiche. La sua capacità

di scorgere le connessioni fra i numeri primi e l'arido mondo astratto della geometria non commutativa è in buona parte dovuta al suo talento nel riprendere diversi elementi dalle differenti culture matematiche che ha visitato nei suoi viaggi matematici. Alcuni ricercatori preferiscono muoversi, durante le loro esplorazioni, a coppie o in gruppi. Insieme, le loro diverse abilità possono aiutarli ad attraversare oceani matematici dove, restando da soli, potrebbero non farcela. Connes, però, è uno di quei viaggiatori che amano la solitudine: «Se si vuole veramente scoprire qualcosa, è necessario essere soli».

La nuova geometria scoperta da Connes aveva alla propria base lo sviluppo della geometria algebrica portato avanti da Weil e da Grothendieck, che avevano elaborato un nuovo dizionario con cui tradurre la geometria nell'algebra. L'utilità di questo dizionario emerge quando ci troviamo di fronte a un problema che se è espresso nel linguaggio della geometria rimane oscuro e avvolto dal mistero, mentre diventa immediatamente chiaro non appena lo si traduce in termini algebrici. È in questo modo che Weil è riuscito a calcolare il numero di soluzioni alle equazioni e a dimostrare che gli zeri nei relativi paesaggi giacciono su una linea retta. Se si fosse limitato a cercare di comprendere le forme geometriche modellate su queste equazioni, non sarebbe giunto da nessuna parte; ma, una volta messo a punto il suo dizionario algebrico-geometrico, aveva i mezzi per capire.

Se la geometria di Weil rispose a domande relative alla pura teoria dei numeri, le idee di Connes fornirono una descri-

zione matematica di una geometria che i teorici delle stringhe e i fisici quantistici cercavano – ormai disperatamente – di costruire. Alla fine del XX secolo, i fisici erano alla ricerca di una nuova geometria che puntellasse la teoria delle stringhe, che era stata introdotta negli anni Settanta come una possibile soluzione dell'incompatibilità fra la fisica quantistica e la teoria della relatività. Connes rimase affascinato da questo problema, e iniziò a cercare quella geometria che i fisici ritenevano dovesse esistere. Egli comprese che, pur non avendo una chiara immagine del lato fisico di questa geometria, poteva pur sempre costruire il suo lato algebrico astratto. Fu una scoperta che solo uno studioso abituato a muoversi fra le astrazioni del mondo matematico avrebbe potuto compiere; l'intuizione fisica non ne sarebbe venuta a capo.

Lo strano comportamento del mondo subatomico costrinse Connes a mettere completamente da parte i modi ordinari con cui comprendiamo la geometria convenzionale. Se la rivoluzione geometrica di Riemann offrì a Einstein il linguaggio in cui descrivere la fisica dell'incredibilmente grande, la geometria di Connes offre ai matematici la possibilità di penetrare nella strana geometria dell'incredibilmente piccolo. Grazie a lui, potremo forse finalmente riuscire a decifrare la struttura elementare dello spazio.

Hugh Montgomery e Michael Berry avevano evidenziato la possibile connessione fra i numeri primi e il caos quantistico. Il fatto che il linguaggio di Connes fosse perfettamente adatto alla trattazione della fisica quantistica contribuì ad alimentare l'ottimismo sull'esito del suo attacco all'ipotesi di

Riemann. Dato che proveniva da un rinascimento matematico francese che aveva già creato nuove tecniche per orientarsi nei paesaggi zeta, è comprensibile che la comunità matematica ritenesse la risposta al problema ormai vicina. Tutti i fili venivano infine a ricongiungersi.

Ciò che Connes crede di aver identificato è uno spazio geometrico molto complesso, chiamato lo spazio non commutativo delle classi degli adeles, costruito nel mondo dell'algebra. Per costruire questo spazio si servì di strani numeri scoperti al principio del XX secolo, i numeri *p*-adici. C'è una famiglia di numeri *p*-adici per ogni numero primo *p*. Connes ritiene che congiungendo tutti questi numeri e osservando come opera la moltiplicazione in questo spazio estremamente singolare, gli zeri di Riemann dovrebbero apparire naturalmente come risonanze all'interno di questo spazio. Il suo approccio è un cocktail esotico di molti degli ingredienti che sono emersi durante i secoli di studio dei numeri primi. Non c'è da sorprendersi che i matematici valutassero con fiducia le sue possibilità di successo.

Connes non è soltanto un maestro della matematica, ma ha anche un particolare carisma nell'esporre le proprie idee agli altri. Molti sono rimasti ipnotizzati di fronte alle sue presentazioni dell'ipotesi di Riemann. Mentre lo ascoltavo, ero convinto che dal lavoro che aveva descritto sarebbe inevitabilmente scaturita una dimostrazione, che lui aveva fatto il grosso del lavoro e che gli altri avrebbero ormai dovuto dare soltanto qualche ritocco finale. Ma per quanto possa dare l'impressione di avere ormai compreso quella grande idea da

tutti ricercata, lo stesso Connes sa bene che resta ancora molta strada da fare. «Il processo di verifica può essere molto doloroso: c'è una terribile paura di sbagliare [...] che fa crescere incredibilmente l'ansia, poiché non si è mai in grado di sapere se le proprie intuizioni sono corrette, un po' come nei sogni, dove spessissimo l'intuizione si rivela errata.»

Nella primavera del 1997, Connes andò a Princeton per spiegare le sue nuove idee ai pezzi grossi: Bombieri, Selberg e Sarnak. Princeton era ancora indiscutibilmente la mecca dell'ipotesi di Riemann, anche se Parigi spingeva per conquistare il primato. Selberg era diventato il padrino del problema: era inconcepibile che una qualunque ipotesi potesse superare il vaglio senza essere prima rigorosamente esaminata da un uomo che aveva speso mezzo secolo a combattere con i numeri primi. Sarnak era il giovane matematico il cui acuminato intelletto avrebbe individuato subito la più piccola debolezza della teoria. Aveva da poco unito le sue forze a quelle di Nick Katz (anche lui di Princeton), uno degli indiscussi maestri della matematica sviluppata da Weil e Grothendieck. Insieme avevano dimostrato che la strana distribuzione statistica nei tamburi casuali che pensiamo descrivano gli zeri nel paesaggio di Riemann sono certamente presenti anche nei paesaggi presi in esame da Weil e Grothendieck. Lo sguardo di Katz era particolarmente affinato, e ben poco riusciva a sfuggirgli. Era stato proprio Katz, qualche anno prima, a individuare l'errore nella prima dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat proposta da Wiles.

E c'era infine Bombieri, l'indiscusso maestro dell'ipotesi di Riemann. Si era guadagnato la sua medaglia Fields per aver ottenuto quello che a oggi è il risultato più significativo sullo scostamento fra il vero numero di numeri primi e la stima di Gauss: la dimostrazione di ciò che i matematici chiamano l'ipotesi di Riemann «in media». Nella quiete del suo ufficio, da cui si gode un panorama sui boschi che circondano l'Institute for Advanced Study, Bombieri era intento a mettere ordine in tutte le intuizioni da lui stesso elaborate negli anni precedenti, in vista di un assalto finale alla soluzione definitiva del problema. Come Katz, anche Bombieri ha un occhio fine per i dettagli. Appassionato di filatelia, una volta gli si presentò l'occasione di comprare un francobollo molto raro da aggiungere alla sua collezione. Dopo averlo esaminato attentamente, vi scoprì tre imperfezioni e lo restituì al venditore, indicandogliene però solo due; tenne per sé la terza, lieve imperfezione, nel caso in futuro gli fosse stato offerto un altro falso con le correzioni a ciò che aveva indicato. Qualunque teoria candidata alla dimostrazione dell'ipotesi di Riemann deve essere prona ad affrontare un esame altrettanto severo.

Selberg, Sarnak, Katz, Bombieri: uno schieramento formidabile, ma che non riusciva affatto a intimidire Connes. La forza delle sue argomentazioni e della sua personalità sarebbero state facilmente all'altezza dei pezzi grossi di Princeton. Egli sapeva di non avere ancora dimostrazioni, ma era convinto che la propria impostazione era quella che offriva le migliori prospettive di trovare una soluzione all'ipotesi di

Riemann. Essa riuniva molte delle idee che erano emerse dalla fisica quantistica e dalle intuizioni matematiche di Weil e Grothendieck.

La «mafia» di Princeton ammise che c'erano stati dei progressi, ma il problema non era comunque stato risolto. Sarnak riconobbe che Connes aveva saputo sviluppare con successo quelle idee che lui stesso aveva appreso dal proprio supervisore, Paul Cohen, poco dopo essere arrivato alla Stanford. La differenza stava nel fatto che Connes disponeva ora di un nuovo sofisticato linguaggio e di nuove tecniche che lo aiutavano a dare una forma precisa alle idee di Cohen. Ma nell'approccio di Connes rimaneva comunque un problema: sembrava aver sistemato le cose in modo che fosse impossibile vedere un qualunque punto che giacesse al di fuori della retta di Riemann. Al pari di un prestigiatore, Connes faceva vedere al suo pubblico solo i punti sulla retta, mentre quelli al di fuori sparivano nella sua manica matematica.

«Connes è in grado di ipnotizzare il pubblico» afferma Sarnak. «È un tipo molto persuasivo. Ha fascino. Se gli fai notare un punto debole del suo approccio, la volta dopo ti dice "Avevi ragione". È per questo che riesce a conquistarti così facilmente.» Dopodiché, spiega Sarnak, in breve tempo Connes inserisce qualche nuova capriola nel suo ragionamento. Sarnak ritiene comunque che Connes non sia ancora in possesso di quella sorta di magia che permise a Weil di fare la sua grande scoperta mentre si trovava in prigione, nel 1940. Bombieri concorda: «Continuo a pensare che qui ci sia bisogno di qualche nuova, grande idea».

Poco tempo dopo la presentazione di Connes, Bombieri ricevette un'e-mail da un amico, Doron Zeilberger dell'università di Temple. Stando a quanto scriveva, sembrava proprio che Zeilberger avesse scoperto delle nuove, incredibili proprietà di π. Bombieri, però, fu abbastanza accorto da far caso alla data: era il 1° di aprile. Per mostrare di aver capito lo scherzo, rispose a tono. Furbescamente, si ricollegò alla febbre che si stava diffondendo intorno ai contributi dati da Connes alla ricerca di strutture regolari nella distribuzione dei numeri primi: «Ci sono sviluppi fantastici alla conferenza che Alain Connes ha tenuto all'Institute for Advanced Study mercoledì scorso...». Un giovane fisico presente fra il pubblico ha intuito in un lampo come completare il progetto di Connes. L'ipotesi di Riemann è valida. «Per favore date la massima diffusione a questa notizia.»

Zeilberger stette al gioco, e una settimana dopo l'annuncio era stato comunicato ai matematici di tutto il mondo attraverso il bollettino elettronico del successivo Congresso internazionale. Ci volle del tempo per smorzare l'eccitazione prodotta dallo scherzo di Bombieri. Ritornato a Parigi, Connes scoprì che quelle notizie erano sulla bocca della gente. E anche se il bersaglio dello scherzo erano in realtà i fisici, se la prese parecchio.

Il pesce d'aprile di Bombieri sembra aver segnato la fine dell'entusiasmo intorno al lavoro di Connes sull'ipotesi di Riemann. Ora che le acque si sono calmate, pare che gran parte delle speranze che le idee di Connes potessero risolvere il segreto dei numeri primi siano svanite. Anche nel suo sofi-

sticato mondo della geometria non commutativa, i primi restano qualcosa di inafferrabile. Sono ormai passati alcuni anni dall'entrata in scena di Connes, ma la Fortezza Riemann rimane inespugnata. Naturalmente, è ancora possibile che l'approccio di Connes si riveli fruttuoso; molte cose lo fanno pensare. Tuttavia, è ormai venuta meno la sensazione che tale approccio possa garantire un facile raggiungimento della dimostrazione. Può darsi che oggi le mura che proteggono l'ipotesi di Riemann appaiano un po' diverse, ma restano impenetrabili proprio come lo erano ieri.

Lo stesso Connes cerca di prendere con filosofia questo punto morto su cui la sua indagine si è arenata. Come commentò all'annuncio di un premio da un milione di dollari per chi avesse risolto l'ipotesi di Riemann, «per me, la matematica è sempre stata la più grande scuola di umiltà. L'inestimabile valore della matematica sta soprattutto nei suoi problemi più incredibilmente difficili, che sono un po' i suoi ottomila. Raggiungere la vetta sarà estremamente difficile, e potremmo anche dover pagare un caro prezzo. Ma la verità è che, una volta che l'avremo raggiunta, potremo ammirare un panorama stupendo». Connes non si è ancora arreso, e anzi continua nella sua battaglia, sperando in un'ultima grande idea che lo metta in grado di giungere al termine del suo viaggio. Il suo desiderio è quello di raggiungere quel momento meraviglioso, che ogni matematico può riconoscere in qualche punto della propria vita, quando all'improvviso tutte le cose vanno al loro posto. «Quando arriva l'illuminazione, c'è un tale coinvolgimento emotivo che è impossibile

rimanere passivi o indifferenti. Nelle rare occasioni in cui l'ho sperimentata, non sono riuscito a trattenere le lacrime.»

Continuiamo ancora, quindi, ad ascoltare il misterioso ritmo dei primi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19... I primi si estendono fino agli estremi confini dell'universo dei numeri, senza mai finire. Essi sono al centro della matematica, sono gli elementi primari da cui consegue ogni altra cosa. Dobbiamo davvero rassegnarci al fatto che, per quanto possiamo desiderare di trovare un ordine e una spiegazione, questi numeri fondamentali potrebbero rimanere per sempre fuori della nostra portata?

Euclide dimostrò che i numeri primi proseguono all'infinito. Gauss ipotizzò che seguono un ordine casuale, come se fossero stati scelti lanciando una moneta. Riemann venne risucchiato in un cunicolo che lo condusse a un paesaggio immaginario dove i numeri primi si convertono in musica. In questo paesaggio, ciascun punto a livello del mare suona una nota. Si trattava quindi di interpretare la mappa del tesoro di Riemann, e di scoprire l'ubicazione di ogni punto a livello del mare. Armato di una formula che aveva tenuto segreta al resto del mondo, Riemann scoprì che per quanto la disposizione dei numeri primi sembrasse caotica, i punti nella sua mappa erano perfettamente ordinati: anziché essere sparpagliati a caso qua e là, erano allineati lungo una retta. Non gli era possibile vedere abbastanza lontano in questo paesaggio per poter asserire che quest'ordine sarebbe sempre stato rispettato, ma pensava di sì. Era nata l'ipotesi di Riemann.

Se l'ipotesi di Riemann è corretta, nessuna delle note avrà

un suono più forte delle altre; l'orchestra che suona la musica dei numeri primi avrà un bilanciamento perfetto. Ciò spiegherebbe il fatto che, nella distribuzione dei numeri primi, non vediamo emergere andamenti dominanti: a un andamento di questo genere corrisponderebbe infatti uno strumento che suona più forte degli altri. È come se ogni strumento seguisse il proprio motivo, ma con un'armonia complessiva così perfetta che i motivi finiscono per cancellarsi, lasciando soltanto il flusso e il riflusso apparentemente caotici dei primi.

Se è corretta, l'ipotesi di Riemann ci aiuterà a capire perché i numeri primi ci appaiono come se fossero stati estratti a caso, lanciando una moneta. Ma forse l'intuizione di Riemann su questi punti a livello del mare è soltanto un'illusione. Forse, al proseguire della musica, un particolare strumento nell'orchestra dei numeri primi inizierà a prendere il sopravvento sugli altri. Forse agli estremi orizzonti dei numeri si nascondono delle strutture regolari che dobbiamo ancora scoprire. Forse la moneta dei numeri primi iniziò a mostrare una particolare inclinazione quando la Natura la lanciò più e più volte nel processo di creazione dell'universo matematico in cui viviamo. Come abbiamo avuto modo di scoprire, i numeri primi possono essere dei soggetti maliziosi, capaci di nascondere alla nostra vista i loro veri colori.

Iniziò così la ricerca di una conferma alla convinzione di Riemann secondo la quale i punti a livello del mare nella sua mappa del tesoro dei primi dovevano trovarsi tutti su una linea retta. Abbiamo attraversato in lungo e in largo il mondo

storico e quello fisico: la Francia rivoluzionaria di Napoleone; la rivoluzione neoumanistica in Germania, dalla grande Berlino alle anguste strade medievali di Gottinga; la strana alleanza fra Cambridge e l'India; l'isolamento della Norvegia durante la guerra; il Nuovo Mondo, e una nuova accademia fondata a Princeton per quei coraggiosi cercatori del Graal di Riemann costretti ad abbandonare l'Europa per via delle devastazioni della guerra; e, infine, l'odierna Parigi e un nuovo linguaggio, che venne parlato per la prima volta nella cella di una prigione e che ha sconvolto la mente di uno dei suoi principali sviluppatori.

La storia dei numeri primi si estende ben oltre i confini del mondo matematico. I progressi tecnologici hanno cambiato il modo di fare matematica. Il computer, nato a Bletchley Park, ci ha dato la capacità di vedere dei numeri che prima rimanevano confinati in un universo inaccessibile. Il linguaggio della fisica quantistica ha permesso ai matematici di articolare strutture e connessioni che non sarebbe mai stato possibile scoprire senza le sovrapposizioni fra culture scientifiche. Anche il mondo imprenditoriale dell'AT&T, della Hewlett-Packard e di una catena californiana di megastore dell'elettronica ha avuto una propria parte nella ricerca. Il ruolo centrale dei numeri primi nel panorama della sicurezza informatica ha portato questi numeri alla ribalta. Oggi i numeri primi hanno un impatto sulla vita di tutti noi, poiché in Internet proteggono i segreti elettronici del mondo dagli occhi indiscreti degli hacker.

Ma, nonostante queste continue svolte, i numeri primi

continuano a rimanere inafferrabili. Ogni volta che diamo loro la caccia in un nuovo territorio – che sia il mondo non commutativo di Connes oppure il caos quantistico di Berry – trovano sempre nuovi posti in cui nascondersi.

Molti dei matematici che hanno contribuito alla nostra comprensione dei numeri primi sono stati ricompensati con una lunga vita. Jacques Hadamard e Charles de la Vallée-Poussin, che nel 1896 avevano dimostrato il teorema dei numeri primi, vissero entrambi per più di novant'anni. La gente iniziava a pensare che l'aver dimostrato questo teorema li avesse resi immortali. La credenza in una connessione fra la longevità e i numeri primi è stata ulteriormente alimentata da Atle Selberg e Paul Erdős, che dopo la loro dimostrazione elementare alternativa del teorema dei numeri primi, negli anni Quaranta, hanno superato entrambi la soglia degli ottant'anni. Scherzando, i matematici hanno avanzato una nuova congettura: chiunque riuscirà a dimostrare l'ipotesi di Riemann conquisterà l'immortalità. Stando a un'altra congettura scherzosa, invece, da qualche parte qualcuno ha già dimostrato che l'ipotesi di Riemann è falsa, ma nessuno ne ha avuto notizia perché quello sfortunato matematico è morto sul colpo appena terminato il suo lavoro.

Ci sono diverse opinioni su quanto siamo effettivamente distanti da una soluzione. Andrew Odlyzko, che ha calcolato numerosissimi punti a livello del mare nella mappa del tesoro di Riemann, ritiene che non siamo assolutamente in grado di prevederlo: «Potrebbe essere la prossima settimana, così come potrebbe essere fra un secolo. Il problema sembra

troppo complicato. Dubito che la sua soluzione sarà qualcosa di molto semplice, se non altro perché moltissime persone veramente preparate vi hanno dedicato il loro impegno per tantissimo tempo. Ma, del resto, è anche possibile che qualcuno avrà un'idea particolarmente brillante già la settimana prossima». Altri ritengono che, per raggiungere una soluzione, ci manchino ancora almeno un paio di buone idee.

Basandosi sulla sua conversazione a Princeton con il fisico quantistico Freeman Dyson durante la pausa per il tè, Hugh Montgomery è convinto che la nostra scalata al monte Riemann sia ormai decisamente a buon punto. Ma c'è una nota in calce che rende assai più sobrio il suo ottimismo: «Se non fosse per un'unica lacuna, la nostra dimostrazione dell'ipotesi di Riemann sarebbe completa. Sfortunatamente, quella lacuna è proprio all'inizio». Come sottolinea Montgomery, è un gran brutto posto per una lacuna. Una lacuna nel mezzo significherebbe almeno che abbiamo fatto qualche progresso nel nostro cammino. Ma se si trova all'inizio significa che, a meno di non trovare un modo per superare quel primo ostacolo, il resto del percorso che abbiamo tracciato per raggiungere la vetta del monte Riemann è del tutto inutile. «È per via di un ostacolo a livello teorico che non riusciamo a dimostrare questo primo teorema.»

Molti matematici sono ancora troppo intimoriti per avvicinarsi a questo problema notoriamente difficile, anche se c'è l'incentivo del milione di dollari in palio per chi trova la soluzione. Tanti sono stati i grandi nomi che hanno tentato e fallito: Riemann, Hilbert, Hardy, Selberg, Connes... Ma ci

sono ancora dei matematici abbastanza coraggiosi per provarci, e fra i nomi da tenere d'occhio in futuro ci sono Christopher Deninger in Germania e Shai Haran in Israele.

Molti predicono che l'ipotesi di Riemann raggiungerà il suo bicentenario senza esser stata dimostrata. Alcuni, invece, credono che la sua ora sia ormai giunta, e che con tutte le scoperte che abbiamo fatto su dove dovremmo cercare una soluzione, non potrà resistere ancora a lungo. Alcuni credono che il suo destino sia nelle mani di Gödel: alla fine, cioè, scopriremo che essa è vera ma indimostrabile. Altri ancora ritengono invece che sia falsa. Alcuni, poi, ipotizzano che sia già stata dimostrata ma che l'establishment matematico non abbia il coraggio di rinunciare a questo enigma. Alcuni, infine, sono impazziti cercando una soluzione.

Forse ci siamo talmente fissati a voler osservare i numeri primi dalla prospettiva di Gauss e Riemann, che ciò che ci manca è semplicemente un diverso modo di comprendere questi numeri enigmatici. Gauss propose una stima del numero dei numeri primi, Riemann previde che nella peggiore delle ipotesi il margine d'errore – in eccesso o in difetto – sarebbe stato pari alla radice quadrata di N, e Littlewood mostrò che non è possibile fare di meglio. Forse c'è un punto di vista alternativo che nessuno è stato in grado di trovare per via del nostro attaccamento culturale all'edificio costruito da Gauss.

Come gli investigatori sulla scena di un misterioso delitto, abbiamo preso in esame i diversi sospettati matematici. Chi o che cosa ha messo gli zeri sulla retta critica di Rie-

mann? La scena è disseminata di prove, ci sono impronte dappertutto, abbiamo un fotofit del possibile colpevole. E tuttavia la risposta continua a sfuggirci. A consolarci resta il fatto che, se anche i numeri primi non ci riveleranno mai i loro segreti, ci stanno comunque guidando nella più straordinaria delle odissee intellettuali. Essi hanno acquisito un'importanza che va ben oltre il loro ruolo fondamentale di atomi dell'aritmetica. Come abbiamo scoperto, i numeri primi hanno messo in comunicazione aree della matematica fra le quali non si conoscevano legami. Teoria dei numeri, geometria, analisi, logica, teoria della probabilità, fisica quantistica: sono venute tutte a congiungersi nella nostra ricerca di una soluzione all'ipotesi di Riemann. E questa ricerca ha posto la matematica sotto una nuova luce. Oggi ci meravigliamo di fronte alla sua straordinaria interconnessione: la matematica si è trasformata da una disciplina che si occupa di strutture a una disciplina che indaga le connessioni.

Questi collegamenti non esistono soltanto all'interno del mondo matematico. Un tempo i numeri primi erano considerati come il concetto più astratto, entità che al di fuori della torre d'avorio della matematica avrebbero perso ogni significato. Un tempo i matematici – e G.H. Hardy ne è stato forse il miglior esempio – si rallegravano all'idea di poter esaminare gli oggetti del loro studio in perfetto isolamento, senza farsi distrarre dai problemi del mondo esterno. Ma ormai i numeri primi non offrono più una via di fuga dalle pressioni del mondo reale, come ancora potevano fare per Riemann e altri. I numeri primi rivestono un'importanza

centrale nel quadro della sicurezza dell'odierno mondo elettronico, e le loro risonanze con la fisica quantistica potrebbero dirci qualcosa sulla natura stessa del mondo fisico.

Anche se riusciremo a dimostrare l'ipotesi di Riemann, ci sono molte altre questioni e congetture che ci attendono al varco, molte nuove aree entusiasmanti della matematica che aspettano soltanto la dimostrazione dell'ipotesi per poter occupare la scena. La soluzione sarà soltanto un inizio, il dischiudersi di un territorio vergine, finora inesplorato. Per riprendere le parole di Andrew Wiles, la dimostrazione dell'ipotesi di Riemann ci darà la possibilità di orientarci in questo mondo proprio come la soluzione del problema della longitudine aiutò gli esploratori del XVIII secolo a navigare nel mondo fisico.

Fino ad allora, dovremo accontentarci di ascoltare affascinati questa musica matematica imprevedibile, incapaci di controllare il suo andamento. I numeri primi ci hanno sempre accompagnato nella nostra esplorazione del mondo matematico, rimanendo tuttavia i più enigmatici fra tutti i numeri. Per quanto le più grandi menti matematiche abbiano dato il meglio di sé nel tentativo di spiegare le modulazioni e i mutamenti di questa musica mistica, i numeri primi rimangono tutt'oggi un enigma senza risposta. Siamo ancora in attesa della persona il cui nome vivrà per sempre come quello del matematico che ha fatto cantare i numeri primi.

Ringraziamenti

Molti dei miei colleghi mi hanno offerto con grande generosità il loro tempo e il loro sostegno. In particolare, vorrei ringraziare i seguenti, che sono stati felici di sedersi e di confrontare con me le loro idee e le loro vedute: Leonard Adleman, Sir Michael Berry, Bryan Birch, Enrico Bombieri, Richard Brent, Paula Cohen, Brian Conrey, Persi Diaconis, Gerhard Frey, Timothy Gowers, Fritz Grunewald, Shai Haran, Roger Heath-Brown, Jon Keating, Neal Koblitz, Jeff Lagarias, Arjen Lenstra, Hendrik Lenstra, Alfred Menezes, Hugh Montgomery, Andrew Odlyzko, Samuel Patterson, Ron Rivest, Zeev Rudnick, Peter Sarnak, Dan Segal, Atle Selberg, Peter Shor, Herman te Riele, Scott Vanstone e Don Zagier.

Vorrei ringraziare in particolare Sir Michael Berry, che ho incontrato per la prima volta sulle scale del numero 10 di Downing Street, mentre ero in fila per stringere la mano al primo ministro, e che è stato il primo a portare alla mia attenzione la musica racchiusa nei numeri primi. Il titolo ori-

ginale di questo libro, *The music of the primes*, si ispira proprio a quell'incontro.

Sono in debito con moltissime persone che hanno letto attentamente le prime versioni parziali o totali del manoscritto: Sir Michael Berry, Jeremy Butterfield, Andrea Caranti, Bernard du Sautoy, Jeremy Gray, Fritz Grunewald, Roger Heath-Brown, Andrew Hodges, Jon Keating, Angus Macintyre, Dan Segal, Jim Semple ed Eric Weinstein. Naturalmente, la responsabilità per gli eventuali errori che possono essere rimasti nel testo è soltanto mia.

Mi sono poi stati d'aiuto numerosi libri e articoli, da cui ho tratto una serie di preziose informazioni di sfondo sui temi affrontati. Molte di queste fonti sono citate fra le indicazioni bibliografiche. Una menzione particolare va comunque al periodico «Notices of the American Mathematical Society», che pubblica incessantemente articoli pieni di brillanti intuizioni sulla matematica e sulla comunità di coloro che se ne occupano.

Durante la stesura di questo libro, diverse istituzioni mi hanno assistito con grande disponibilità; fra queste, ricordo l'American Institute of Mathematics, la Certicom, la biblioteca dell'università di Gottinga, i laboratori dell'AT&T a Florham Park, l'Institute for Advanced Study di Princeton, i laboratori della Hewlett-Packard di Bristol, e il Max Planck Institut für Mathematik di Bonn.

Sono estremamente felice di poter riconoscere il mio debito nei confronti di coloro che hanno reso possibile la pubblicazione di questo libro: il mio agente, Antony Topping

della Greene & Heaton, che mi ha seguito dalle prime idee fino alla pubblicazione; Judith Murray, che ci ha fatto incontrare; i miei redattori, Christopher Potter, Leo Hollis e Mitzi Angel, della Fourth Estate, Tim Duggan, della HarperCollins e Carlo Alberto Brioschi, di Rizzoli; e John Woodruff, che ha preparato il volume per la stampa. Dovrei ringraziare in modo particolare Leo, che ha dovuto spendere moltissime ore immerso in astruse riflessioni sulla quarta dimensione.

Non sarei stato in grado di scrivere questo libro senza il sostegno della Royal Society. Il fatto di essere un membro ricercatore della Royal Society mi ha dato l'occasione non solo di inseguire i miei sogni matematici, ma anche di comunicare l'entusiasmo che ho sperimentato lungo questo cammino. La Royal Society è più di un semplice conto in banca: si prende cura di coloro che finanzia. Il loro sostegno alla mia attività di divulgazione matematica è stato inestimabile.

Vorrei ringraziare anche diverse persone del mondo dei media che hanno avuto abbastanza coraggio da prendersi il rischio di pubblicare e trasmettere i miei primi brevi scritti sulla matematica seria, e che si sono presi il tempo di aiutare un matematico a scrivere: Graham Patterson, Philippa Ingram e Anjana Ahuja, che lavorano per «The Times»; John Watkins e Peter Evans, della BBC; e Gerhart Friedlander, di Science Spectra. Sono inoltre grato alla NCR e alla Milestone Pictures per avermi offerto la possibilità di portare la matematica alla comunità delle banche.

Sono diventato un matematico grazie a uno dei miei insegnanti della scuola secondaria, il signor Bailson, che è stato il

primo a mostrarmi un po' della musica nascosta dietro l'aritmetica scolastica. Devo a lui la mia ispirazione, e alla Gillotts Comprehensive School, al King James's 6th Form College e al Wadham College di Oxford l'eccezionale formazione che ho ricevuto.

Un grazie all'Arsenal per essersi aggiudicato il *double* mentre stavo scrivendo questo libro. E all'Highbury per avermi offerto l'importante opportunità di scaricare la tensione dopo le lotte con Riemann.

A titolo personale, voglio ringraziare i miei amici e la mia famiglia per il sostegno che mi hanno dato: mio padre, che mi ha aiutato a comprendere il potere dei numeri; mia madre, che mi ha aiutato a comprendere il potere delle parole; i miei nonni, e specialmente Peter, che sono stati per me fonte di ispirazione; e la mia compagna, Shani, per aver tollerato un libro in casa e per la sua fiducia nella mia capacità di scriverlo. Il mio grazie più grande va a mio figlio, Tomer, con cui ho potuto giocare al termine delle giornate di lavoro, e senza il quale non sarei sopravvissuto alla stesura di questo libro.

Bibliografia

Molti dei testi e degli articoli che seguono hanno fornito materiale importante per la stesura di questo libro. Per chi si senta invogliato ad approfondire il tema, posso raccomandare tutti i titoli di questo elenco. Non vi ho incluso materiale di un livello tecnico così elevato da richiedere una laurea in matematica per poter essere compreso, a meno che non contenesse anche qualche interessante spunto non eccessivamente tecnico.

Albers, D.J., Intervista con Persi Diaconis, in Albers, D.J. e Alexanderson, G.L. (a cura di) *Mathematical People: Profiles and Interviews*, Birkhäuser, Boston 1985, pp. 66-79.

Aldous, D. e Diaconis, P., *Longest increasing subsequences: from patience sorting to the Baik-Deift-Johansson theorem*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 36, n. 4 (1999), pp. 413-32.

Alexanderson, G.L., Intervista con Paul Erdős, in Albers, D.J. e Alexanderson, G.L. (a cura di) *Mathematical People: Profiles and Interviews*, Birkhäuser, Boston 1985, pp. 82-91.

Babai, L., Pomerance, C. e Vértesi, P., *The mathematics of Paul Erdős*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 45, n. 1 (1998), pp. 19-31.

Babai, L. e Spencer, J., *Paul Erdős (1913-1996)*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 45, n. 1 (1998), pp. 64-73.

Barner, K., *Paul Wolfskehl and the Wolfskehl Prize*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 44, n. 10 (1997), pp. 1294-1303.

Beiler, A.H., *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains*, Dover Publications, New York 1964.

Bell, E.T., *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York 1937 [trad. it. *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze 1950].

Berndt, B.C. e Rankin, R.A. (a cura di), *Ramanujan: Letters and Commentary*, American Mathematical Society, Providence, RI 1995 («History of Mathematics», vol. 9).

Berndt, B.C. e Rankin, R.A. (a cura di), *Ramanujan: Essays and Surveys*, American Mathematical Society, Providence, RI 2001 («History of Mathematics», vol. 22).

Berry, M., *Quantum physics on the edge of chaos*, «New Scientist», 1987 (19 novembre), pp. 44-7.

Bollobás, B. (a cura di), *Littlewood's Miscellany*, Cambridge University Press, Cambridge 1986.

Bombieri, E., *Prime territory: exploring the infinite landscape at the base of the number system*, «The Sciences», vol. 32, n. 5 (1992), pp. 30-6.

Borel, A., *Twenty-five years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 45, n. 3 (1998), pp. 373-80.

Borel, A., Cartier, P., Chandrasekharan, K., Chern, S.-S. e Iyanaga, S., *André Weil (1906-1998)*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 46, n. 4 (1999), pp. 440-7.

Bourbaki, N., *Elements d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960 [trad. it. *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano 1963].

Breuilly, J. (a cura di), *Nineteenth-Century Germany: Politics, Culture and Society 1780-1918*, Arnold, London 2001.

Calaprice, A. (a cura di), *The Expanded Quotable Einstein*, Princeton University Press, Princeton 2000.

Calinger, R. *Leonhard Euler: the first St Petersburg years (1727-1741)*, «Historia Mathematica», vol. 23, n. 2 (1996), pp. 121-66.

Campbell, D.M. e Higgins, J.C. (a cura di), *Mathematics: People, Problems, Results*, Wadsworth International, Belmont, CA 1984 (comprende dei capitoli su Bourbaki, Gauss, Littlewood, Hardy, Hasse, la matematica di Cambridge, Hilbert e i suoi problemi, la natura della dimostrazione e il teorema di Gödel).

Cartan, H., *André Weil: memories of a long friendship*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 46, n. 6 (1999), pp. 633-6.

Cartier, P., *A mad day's work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 38, n. 4 (2001), pp. 389-408.

Changeux, J.-P. e Connes, A., *Matière à Pensée*, O. Jacob, Paris 1989 [trad. it., *Pensiero e materia*, Bollati Boringhieri, Torino 1991].

Connes, A., Lichnerowicz, A. e Schützenberger, M.P., *Triangles de pensées*, O. Jacob, Paris 2000 [trad. it., *Triangolo di pensieri*, Bollati Boringhieri, Torino 2001].

Connes, A., *Noncommutative geometry and the Riemann zeta function*, in Arnold, V., Atiyah, M., Lax, P., e Mazur, B. (a cura di) *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, American Mathematical Society, Providence, RI 2000, pp. 35-54.

Courant, R., *Reminiscences from Hilbert's Göttingen*, «The Mathematical Intelligencer», vol. 3, n. 4 (1981), pp. 154-64.

Davenport, H., *Reminiscences of conversations with Carl Ludwig Siegel. Edited by Mrs Harold Davenport*, «The Mathematical Intelligencer», vol. 7, n. 2 (1985), pp. 76-9.

Davis, M., *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing*, W.W. Norton, New York 2000 [trad. it. *Il calcolatore universale: da Leibniz a Turing*, Adelphi, Milano 2003].

Davis, M., *Book review: «Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel» and «Gödel: A Life of Logic»*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 48, n. 8 (2001), pp. 807-13.

Dyson, F., *A walk through Ramanujan's garden*, in Andrews, G.E., Askey, R.A., Berndt, B.C., Ramanathan, K.G. e Rankin, R.A. (a cura di), *Ramanujan Revisited*, Academic Press, Boston, MA 1988, pp. 7-28.

Edwards, H.M., *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York 1974 («Pure and Applied Mathematics», vol. 58) (contiene in appendice una traduzione in inglese del saggio di dieci pagine di Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*).

Flannery, S., con Flannery, D., *In Code: A Mathematical Journey*, Profile Books, London 2000.

Gardner, J.H. e Wilson, R.J., *Thomas Archer Hirst – Mathematician Xtravagant III. Göttingen and Berlin*, «American Mathematical Monthly», vol. 100, n. 7 (1993), pp. 619-25.

Goldstein, L.J., *A history of the prime number theorem*, «American Mathematical Monthly», vol. 80, n. 6 (1973), pp. 599-615.

Gray, J.J., *Mathematics in Cambridge and beyond*, in Mason, R. (a cura di) *Cambridge Minds*, Cambridge University Press, Cambridge 1994, pp. 86-99.

Gray, J.J., *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press, Oxford 2000.

Hardy, G.H., *Mr S. Ramanujan's mathematical work in England*, «Journal of the Indian Mathematical Society», vol. 9 (1917), pp. 30-45.

Hardy, G.H., *Obituary notice: S. Ramanujan*, «Proceedings of the London Mathematical Society», vol. 19 (1921), pp. xl-lviii.

Hardy, G.H., *The theory of numbers*, «Nature», 16 settembre (1922), pp. 381-5.

Hardy, G.H., *The case against the Mathematical Tripos*, «Mathematical Gazette», vol. 13 (1926), pp. 61-71.

Hardy, G.H., *An introduction to the theory of numbers*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 35 (1929), pp. 778-818.

Hardy, G.H., *Mathematical Proof*, «Mind», vol. 38 (1929), pp. 1-25.

Hardy, G.H., *The Indian mathematician Ramanujan*, «American Mathematical Monthly», vol. 44, n. 3 (1937), pp. 137-55.

Hardy, G.H., *Obituary notice: E. Landau*, «Journal of the London Mathematical Society», vol. 13 (1938), pp. 302-10.

Hardy, G.H., *A Mathematical Apology*, Cambridge University Press, Cambridge 1940 [trad. it. *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano 1989].

Hardy, G.H., *Ramanujan, Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*, Cambridge University Press, Cambridge 1940.

Hodges, A., *Alan Turing: The Enigma*, Simon & Schuster, New York 1983 [trad it. *Storia di un enigma. Vita di Alan Turing (1912-1954)*, Bollati Boringhieri, Torino 1991].

Hoffman, P. *The Man Who Loved Only Numbers. The Story of Paul Erdős and the Search for the Mathematical Truth*, Fourth Estate, Lon-

don 1998 [trad. it. *L'uomo che amava solo i numeri. La storia di Paul Erdős, un genio alla ricerca della verità matematica*, Mondadori, Milano 1999].

Jackson, A., *The IHÉS at forty*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 46, n. 3 (1999), pp. 329-37.

Jackson, A., *Interview with Henri Cartan*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 46, n. 7 (1999), pp. 782-8.

Jackson, A., *Million-dollar mathematics prizes announced*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 47, n. 8 (2000), pp. 877-9.

Kanigel, R., *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*, Scribner's, New York 1991.

Koblitz, N., *Mathematics under hardship conditions in the Third World*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 38, n. 9 (1991), pp. 1123-8.

Knapp, A.W., *André Weil: a prologue*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 46, n. 4 (1999), pp. 434-9.

Lang, S., *Mordell's review, Siegel's letter to Mordell, Diophantine geometry, and 20th century mathematics*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 42, n. 3 (1995), pp. 339-50.

Laugwitz, D., *Bernhard Riemann, 1826-1866: Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, Birkhäuser, Basel 1996.

Lesniewski, A., *Noncommutative geometry*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 44, n. 7 (1997), pp. 800-805.

Littlewood, J.E., *A Mathematician's Miscellany*, Methuen, London 1953.

Littlewood, J.E., *The Riemann Hypothesis*, in Good, I.J., Mayne, A.J. e Maynard Smith, J. (a cura di), *The Scientist Speculates: An Anthology of Partly-Baked Ideas*, Heinemann, London 1962, pp. 390-1.

Mac Lane, S., *Mathematics at Göttingen under the Nazis*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 42, n. 10 (1995), pp. 1134-8.

Neuenschwander, E., *A brief report on a number of recently discovered sets of notes on Riemann lectures and on the transmission of the Riemann* Nachlass, «Historia Mathematica», vol. 15, n. 2 (1988), pp. 101-13.

Pomerance, C., *A tale of two sieves*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 43, n. 12 (1996), pp. 1473-85 (un articolo sulla fattorizzazione dei numeri).

Reid, C., *Hilbert*, Springer, New York 1970.

Reid, C., *Julia, A Life in Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington, D.C. 1996 (con contributi di Lisl Gaal, Martin Davis e Jurij Matijasievič).

Reid, C., *Being Julia Robinson's sister*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 43, n. 12 (1996), pp. 1486-92.

Reid, L.W., *The Elements of the Theory of Algebraic Numbers*, con un'Introduzione di David Hilbert, Macmillan, New York 1910.

Ribenboim, P., *The New Book of Prime Number Records*, Springer, New York 1996.

Sacks, O., *The Man Who Mistook His Wife for a Hat*, Simon & Schuster, New York 1985 [trad. it. *L'uomo che scambiò sua moglie per un cappello*, Adelphi, Milano 1986].

Sagan, C., *Contact*, Simon & Schuster, New York 1985 [trad. it. *Contact*, Bompiani, Milano 1986].

Schappacher, N., *Edmund Landau's Göttingen: from the life and death of a great mathematical center*, «The Mathematical Intelligencer», vol. 13, n. 4 (1991), pp. 12-8.

Schechter, B., *My Brain is Open. The Mathematical Journeys of Paul Erdős*, Simon & Schuster, New York 1998.

Schneier, B., *Applied Cryptography*, second edition, John Wiley, New York 1996.

Segal, S.L., *Helmut Hasse in 1934*, «Historia Mathematica», vol. 7, n. 1 (1980), pp. 46-56.

Selberg, A., *Reflection around the Ramanujan centenary*, in Berndt, B.C. e Rankin, R.A. (a cura di), *Ramanujan: Essays and Surveys*, American Mathematical Society, Providence, RI 2001 («History of Mathematics», vol. 22).

Shimura, G., *André Weil as I knew him*, «Notices of the American Mathematical Society», vol. 46, n. 4 (1999), pp. 428-33.

Singh, S., *The Code Book*, Fourth Estate, London 1999 [trad. it. *Codici e segreti*, Rizzoli, Milano 1999].

Struik, D.J., *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications, New York 1948 [trad. it. *Matematica, un profilo storico*, Il Mulino, Bologna 1981].

Weil, A., *Two lectures on number theory, past and present*, «L'Enseignement Mathémathique», vol. 20, n. 2 (1974), pp. 87-100.

Weil, A., *Number Theory: An Approach through History from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, Boston, MA 1984 [trad. it. *Teoria dei numeri. Storia e matematica da Hammurabi a Legendre*, Einaudi, Torino 1993].

Weil, A., *Souvenirs d'apprentissage*, Verlag, Basel 1991 [trad. it. *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi, Torino 1994].

Wilson, R., *Four Colours Suffice: How the Map Problem Was Solved*, Allen Lane, London 2002.

Zagier, D., *The first 50.000.000 prime numbers*, «Mathematical Intelligencer», vol. 0 (1977), pp. 7-19 (ai matematici che fondarono questa rivista, sembrò opportuno assegnare il numero zero alla prima uscita).

Siti web

Fra gli articoli sopraelencati, tutti quelli pubblicati in «Notices of the American Mathematical Society» e in «Bulletin of the American Mathematical Society» sono disponibili on-line agli indirizzi http://www.ams.org/notices/ e http://www.ams.org/bull/

http://www.musicoftheprimes.com
È il mio sito web; comprenderà del materiale in continua evoluzione a complemento del libro.

http://www.claymath.org/
Vi si trova una descrizione di tutti e sette i Problemi del Millennio, oltre ai video delle presentazioni di Connes, Wiles e dello stesso Landon T. Clay.

http://www.msri.org
È il sito del Mathematical Sciences Research Institute di Berkeley. Offre una grande quantità di video, fra cui alcuni rivolti a un pubblico non specializzato.

http://www.rsasecurity.com/rsalabs/faq/
http://www.rsasecurity.com/rsalabs/challenges/
Qui potete trovare le sfide crittografiche dell'RSA.

http://www.mersenne.org/prime.htm
Visitate il sito per partecipare alla Great Internet Mersenne Prime Search.

http://www.eff.org
Informazioni sui premi offerti dell'Electronic Frontier Foundation per la scoperta di grandi numeri primi.

http://www.maths.ex.ac.uk/~mwatkins/
Una fonte interessante di citazioni e di altro materiale relativo ai numeri primi e all'ipotesi di Riemann.

http://www.certicom.com/research/ecc_chal_contents.html
In questo sito troverete una descrizione della crittografia a curve ellittiche, comprese le sfide crittografiche proposte della Certicom.

http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history
«The MacTutor History of Mathematics Archive», una risorsa fantastica di biografie matematiche a cura della University of St Andrews.

http://www.phys.unsw.edu.au/music/
Un sito affascinante che esplora le qualità acustiche di differenti strumenti musicali in relazione con le lastre metalliche di Chladni.

http://www.utm.edu/research/primes/
Una buona fonte di informazioni sui numeri primi.

http://www.naturalsciences.be/expo/ishango/en/index.html
Un'occasione di vedere l'osso di Ishango.

http://www.turing.org.uk/
Un sito web curato da Andrew Hodges, biografo di Alan Turing.

http://www.salon.com/people/feature/1999/10/09/dyson
Freeman Dyson: frog prince of physics, un articolo di Kristi Coale.

Sommario

1.	Chi vuol essere milionario?	7
2.	Gli atomi dell'aritmetica	39
3.	Lo specchio matematico immaginario di Riemann	110
4.	L'ipotesi di Riemann: da numeri primi casuali a zeri ordinati	155
5.	La corsa matematica a staffetta: parte la rivoluzione riemanniana	187
6.	Ramanujan, il mistico matematico	242
7.	Esodo matematico: da Gottinga a Princeton	271
8.	Macchine della mente	321
9.	L'era dell'informatica: dalla mente al PC	375
10.	Scomporre numeri e decifrare codici	413
11.	Dagli zeri ordinati al caos quantistico	474
12.	L'ultima tessera del puzzle	535

Ringraziamenti 585
Bibliografia 589
Indice dei nomi 599

Finito di stampare nell'ottobre 2005 presso
Grafica Veneta S.p.A. - Trebaseleghe (PD)
Printed in Italy

RCS Libri

ISBN 88-17-00843-5